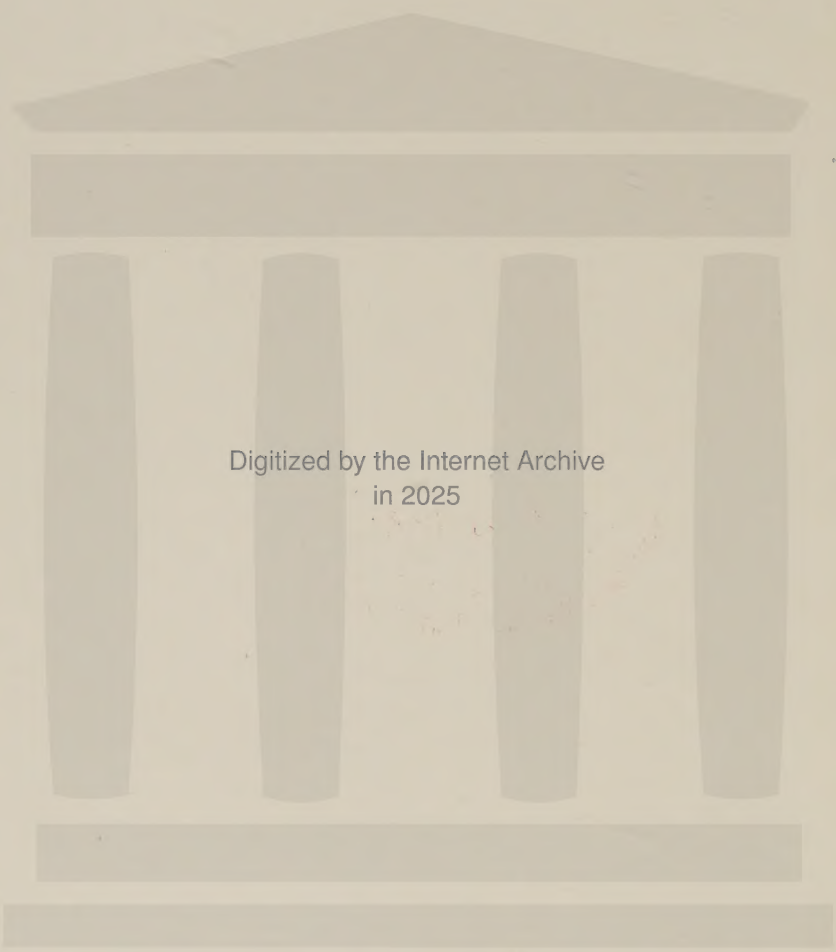


Digitized by the Internet Archive
in 2025

https://archive.org/details/anales-de-la-sociedad-cientifica-argentina_1931_111

IMPERIAL MYCOLOGICAL
9 JULY 1936
INSTITUTE

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA

COMISIÓN ESPECIAL DE LOS «ANALES»

Matemáticas

Ingeniero y doctor Claro C. Dassen

Física

Doctor Ramón G. Loyarte

Química

Doctor Horacio Damianovich

Ciencias Naturales

Doctor Franco Pastore

Ciencias Geográficas

Profesor Juan W. Gez

Higiene e Ingeniería sanitaria

Doctor Nicolás Lozano
Ingeniero Antonio Paitoví

Ciencia de la Educación

Profesor Víctor Mercante

ANALES

DE LA

SOCIEDAD CIENTÍFICA

ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA

ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DIRECTOR : CLARO C. DASSEN

TOMO CXI

Primer semestre de 1931

BUENOS AIRES

IMPRENTA Y CASA EDITORA « CONI »

684 — CALLE PERÚ — 684

—

1931

INVESTIGACIÓN SOBRE LOS ESPECTROS IMPUROS

Y SUS CONSECUENCIAS

PARA LA TEORÍA DE LOS COLORES

Por C. VILLALOBOS DOMÍNGUEZ
Profesor en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales
de la Universidad de Buenos Aires

RÉSUMÉ

Recherches sur les spectres impurs, et ses conséquences pour la théorie des couleurs. — L'auteur pense que, relativement aux phénomènes fondamentaux de la coloration, il existe encore des défauts d'observation, d'interprétation et de désignation qui ont, jusqu'à présent, empêché une classification vraiment scientifique des couleurs et d'établir les lois de l'harmonie chromatique, etc. Il décrit un agencement au moyen duquel il a pu analyser les phénomènes de croisement de rayons qui se produisent dans les spectres nommés « directs », graduellement impurifiés, et dans ceux dits « inverses ». Il trouve que ces phénomènes conduisent à établir que les couleurs jaunes, bleus et pourpres proviennent, principalement, du croisement en question, tandis que l'écarlate, le vert et l'outremer proviennent, exclusivement, de radiations simples ; ils forment, dans les spectres purs, des masses compactes sensiblement homogènes en regard à leur action chromatique, de sorte qu'il n'admet pas comme exacte la première proposition de Newton.

L'auteur trouve que la généralité des études connues sur ces questions, sont fondamentalement viciées par le fait d'avoir été établies sur des observations de spectres non sufisamment purs ; il trouve aussi que les désignations usitées pour les couleurs typiques, sont vagues et discordantes. Il propose les suivantes : écarlate (S), vert (G) et outremer (U), pour les couleurs qu'il nomme « simples » ou « primaires »; et jaune (Y), turquoise (T) et pourpre (P) pour les « doubles » ou « secondaires » ; ces dernières, quand provenant de radiations simples, n'ont pas d'importance, vu leur petite extension et leur faible énergie chromatique. En revanche, les couleurs similaires qui résultent de mélanges sont très importantes ; la couleur pourpre est assimilable à ces dernières. Il estime que les couleurs jaunâtres et bleuâtres irréductibles qui présentent un spectre pur dans les sections

« confinantes », de même que les violacées ou pourpres extrêmes, sont des phénomènes physiologiques provenants de quelque sorte de syntonie ou résonance. Il classe les couleurs cramoisi (C), orange (O), citron (L) émeraude (E), blue (B) et violet (V) comme des transitions secondaires parmi les couleurs primaires et les secondaires typiques. Il déduit de tout cela que, en général, ses expériences confirment la théorie de Young, contredisant fondamentalement celle de Hering.

1. *Motivo de esta investigación.* — La preocupación sobre las posibilidades que el estado actual de la ciencia puede proveer para realizar una clasificación verdaderamente sistemática de los colores, y para establecer las leyes de su armonía, me ha llevado a indagar y tratar de resolver diversas dificultades y deficiencias que se notan en los conocimientos básicos de la ciencia cromática. Algunas de esas dificultades son las que trato de exponer y resolver en el presente trabajo.

Todas las investigaciones fundamentales sobre cromática, de que yo tengo noticia, han sido dirigidas, como objeto principal, hacia el estudio de espectros de la luz blanca supuestamente puros. Yo he creído instructivo estudiar además, y más especialmente, espectros deliberadamente impuros.

Para la buena inteligencia del texto, conviene tener presente que llamo *sensación cromática* a cualquier sensación visual, aparte de las de forma, y llamo *color* a todo agente excitador de sensaciones cromáticas por medio de radiaciones luminosas enviadas al aparato visual.

2. *Memento histórico-crítico.* — Newton estableció que la banda coloreada denominada espectro solar está formada por la descomposición de un haz de luz blanca en rayos de distinta refrangibilidad, y afirmó que cada distinto color se corresponde con distinta refrangibilidad de los rayos luminosos :

... las luces que difieren en color, difieren también en refrangibilidad (1).

Al mismo grado de refrangibilidad pertenece siempre el mismo color, y al mismo color pertenece siempre el mismo grado de refrangibilidad... Y así, a todos los colores intermedios en una serie continua pertenecen grados intermedios de refrangibilidad. Y esta analogía entre los colores y la refrangibilidad es muy precisa y estricta ; los rayos siempre concuerdan exactamente en ambas cosas o bien difieren proporcionalmente en ambas (2).

(1) Newton, *Óptica*, 1ª parte, 1ª propos., teorema I.

(2) Newton, *A New Theory about Light and Colours*, in *Trans. Roy. Soc. Lond.* 1672.

Afirmaciones éstas que, como luego he de mostrarlo, no coinciden precisamente con la realidad de los fenómenos.

Encontró Newton que el extremo menos refractado del espectro corresponde al color rojo, y el extremo más refractado corresponde a uno que llama violeta o azul indistintamente, pues hay discordancia en los vocablos que emplea, dado que en un pasaje dice : « *J'ai mesuré la longueur de l'image depuis le rouge extérieur le plus foible à l'une des extrémités, jusqu'au bleu extérieur le plus foible à l'autre extrémité* » (1); y en otro pasaje dice : « *puis, examinant l'image réfractée du trou, j'observai que la longueur surpassait de beaucoup la largeur, et que la partie la plus réfractée paroissoit violette, que la moins réfractée paroissoit rouge et que les parties intermédiaires paroissoient bleue, verte, jaune* » (2).

Se ve que Newton designa de dos modos discordantes el mismo color, y esto ha llamado la atención del traductor francés, quien en la página 39 pone una nota diciendo : « *Ici comme en plusieurs autres endroits du texte, le mot bleu est à la place du mot violet* ».

Más allá de ese color « violeta » o « azul », halló Newton otro vagamente purpúreo, pero no lo incluye en su enumeración por ser muy poco luminoso y por suponer que, en las condiciones de sus experimentos, podría proceder de alguna porción de luz extraña al directo proceso de la dispersión prismática. Es lo cierto, sin embargo, que la parte más extrema y obscura por ese lado aparece de color violáceo o purpúreo en todos los espectros de la luz blanca convenientemente formados.

Como quiera que sea, Newton consignó que encontraba bien distinguibles en el espectro siete colores « simples y primitivos », es decir, « colores de los rayos homogéneos », y los nombró : *rojo, anaranjado, amarillo, verde, azul, índigo y violeta.* (Nótese que aquí la palabra *azul* no está en el extremo de la serie sino en el antepenúltimo lugar). Halló también que la suma de todas las radiaciones espectrales reconstituye la luz blanca, lo cual es exactamente cierto.

Wollaston publicó, en 1802, que sólo hallaba *cuatro* colores en el espectro de la luz solar :

No debo terminar estas observaciones sobre la dispersión, sin advertir que los colores en que un haz de luz blanca es separable por refracción encuentro que no son siete, como usualmente se ven en el arco iris, ni reducibles,

(1) Newton, *Optique,* traducción francesa M. Beauzé, París, 1787, página 28.
(2) *Op. cit.,* página 31.

por ningún medio que yo conozca, a tres, como algunas personas han concebido; sinó que, empleando un muy estrecho haz luminoso, cuatro primarias divisiones del espectro prismático pueden ser vistas con un grado de distinción que, creo, no ha sido descrito ni observado antes de ahora.

Si un haz de luz del día es admitido en un cuarto obscuro por una rendija de una anchura de $^1/_{20}$ de pulgada, y recibido por el ojo a la distancia de 10 a 12 pies a través de un prisma de *flint glass libre de estrías,* sostenido cerca del ojo, el haz es visto separado en los cuatro siguientes colores únicamente : *rojo, verde-amarillento, azul* y *violeta,* en las proporciones representadas en la figura (Fig. A).

La línea A (B), que limita el extremo rojo del espectro es algo confusa... la línea B (D), entre el rojo y el verde, es perfectamente distinguible en cierta posición del prisma y así igualmente lo son la D (G) y la E (H), los dos límites del violeta. Pero C (?), el límite del verde y el azul no está claramente marcado como el resto ; y hay también, a cada lado de este límite, otras dos líneas obscuras, *f* (*b*) y *g* (F), cada una de las cuales, en un imperfecto experimento, pueden ser tomadas por los límites de estos colores (1).

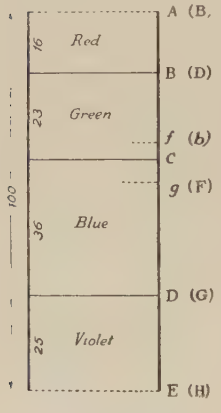


Fig. A. — Espectro de Wollaston

(Advierto que yo he añadido entre paréntesis, de acuerdo con Mayer, las letras de la nomenclatura de Fraunhofer, correspondientes a las rayas oscuras indicadas por Wollaston.)

Es importante notar que el experimento de Wollaston, bastante más preciso que el de Newton, no distingue los colores *anaranjado, amarillo* e *índigo* (bien que sobre este último puede admitirse por seguro que Wollaston denomina *azul* al color que Newton llamó *índigo,* y, en este caso, es el *azul* de Newton, entre su índigo y el verde, lo que para Wollaston no aparece).

En 1807, Young demostró que la síntesis de la luz blanca puede obtenerse con sólo tres luces distintas : *roja, verde* y *violeta ;* y que con mezclas de ellas pueden obtenerse todas las demás sensaciones cromáticas.

Sir Isaac Newton observó que el efecto de la luz blanca sobre el sentido de la vista puede ser imitado por una mezcla de colores tomados de diferentes partes del espectro, no obstante la omisión de algunos de los rayos pertenecientes naturalmente a la luz blanca. En efecto, si interceptamos la

(1) WOLLASTON, *Trans. Roy. Soc. Lond.*, 1802.

mitad de cada una de las principales porciones en que el espectro es dividido, las mitades remanentes conservarán todavía, cuando son mezcladas entre sí, la apariencia de blancura ; y así, es probable que las diferentes porciones del espectro que aparecen de un color tengan precisamente el mismo efecto sobre el ojo.

Es cierto que perfectas sensaciones de amarillo y azul son producidas respectivamente por mezclas de luz roja y verde y de verde y violeta, y hay razón para sospechar que aquellas sensaciones son siempre compuestas de las separadas sensaciones combinadas ; al menos, esta suposición simplifica la teoría de los colores. Puede, por lo tanto, ser adoptada con ventaja hasta que sea encontrada inconsistente con alguno de los fenómenos, y podemos considerar la luz blanca como compuesta de una mezcla de rojo, verde y violeta únicamente... (1).

Helmholtz (1852) y Maxwell (1855) rehabilitaron la genial teoría de Young, que había quedado casi olvidada, y la reforzaron con nuevos experimentos, si bien no pudieron mediante ella dar razón de la particular visión de los daltónicos (que luego se ha hecho posible con las investigaciones de Pole y von Hippel sobre esta anomalía visual) y de algunos otros fenómenos de la visión normal.

Hering, en 1872 (2), pretendió resolver dichas dificultades elaborando otra teoría, según la cual las primarias sensaciones de color consisten en tres pares de ellas : *blanco-negro*, *amarillo-azul* y *rojo-verde,* considerando los miembros de cada par, no como « complementarios », sino como « antagónicos », de modo que los términos de cada par se anularían recíprocamente, a la manera que la acción simultánea del amarillo y azul destruye la cualidad propiamente cromática o tonal de ambos. Para Hering, el amarillo sería una sensación *simple* o *primaria;* y esta especial objeción es la clave de la controversia que subsiste entre ambas teorías : la de Young sostiene que el amarillo es secundario : la de Hering arguye que es primario.

Ladd Franklin, en nuestros días (3), procura conciliar ambas tesis admitiendo que *tres* colores objetivos (rojo, verde y azul) son suficientes para causarnos toda clase de sensaciones cromáticas, pero que *cuatro* sensaciones son necesarias : rojo, amarillo, verde y azul. La cuestión de si en la visión normal « fotópica » (foveal) hay sensaciones

(1) Young, Th., *A Course of Lectures of Natural Philosophy and the Mechanical Arts,* 1807.

(2) Hering, E., *Zur Lehre vom Lichtsinn,* in *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, 66,* 1872.

(3) Ladd Franklin, C., *Colour and Colour Theories,* New York, 1929.

separadas de blanco y negro, como Hering lo ha pretendido, queda indeterminada, si bien ha sido demostrado que la visión «crepuscular» y periférica es exclusivamente de blanco y negro; materia que, por lo demás, no interesa a mi investigación, referente sólo a la visión normal y diurna. En ésta, aun ateniéndose solamente a los seguidores de la teoría Young, encontramos generalmente admitido que existen o pueden objetivamente formarse tres clases de blanco, bien que fisiológicamente se lo admita como una sola sensación: *a)* el blanco formado por todos lo colores espectrales; *b)* el blanco ternario, formado por los tres primarios u otros tres distintos; *c)* el blanco binario, formado por cada primario y su complemento secundario; y *d)* una «infinidad de blancos binarios» (1) formados por «complementarios» cualesquiera.

Me incumbe, en cambio, como fenómeno particular, analizar la significación del color púrpura, considerado en general por los autores como un color en cierto modo espúreo, dado que no existe en el espectro común, aun cuando es innegable su existencia como fenómeno sensorial y se conoce bien, desde antiguo, que puede ser obtenido perfectamente por mezcla de las radiaciones de ambos extremos espectrales. Pero su singular característica es la de ser un color que no tiene índice propio de refracción, o sea longitud de onda propia, como todos los demás la tienen, ya que no se lo conoce sino como compuesto, como mezcla de esas dos clases de radiaciones muy diversamente refrangibles. Esta peculiar condición crea gran perplejidad en cuanto a su colocación y extensión en los diversos círculos o polígonos cromáticos que se han ideado, para los cuales, en verdad, ningún color ha alcanzado (quizá por eso mismo) ubicación fundada y fijamente establecida. Así se explica que nos encontremos con autores que, tratando de establecer una clasificación cromática, tales como Chevreul y Klincksieck et Valette, no han hallado arbitrio más «científico» para distribuir los diversos tonos, que el de colocarse alrededor de una mesa provistos de variadas muestras de lana teñidas, acompañados por personas más o menos expertas, y resolver en amigable acuerdo la posición de los diversos colores en el círculo cromático:

Los tres colores simples (sic): el *azul,* el *amarillo* y el *rojo,* fueron escogidos de común acuerdo por una reunión de hombres de ciencia ayudados por hábiles tintoreros, tan puros y equidistantes como fué posible; y dis-

(1) Rosenstiehl, M. A., *Traité de la couleur au point de vue physique, physiologique et esthétique,* París, 1913, página 66.

puestos en los tres vértices de un triángulo equilátero inscrito en un círculo. Entre ellos fueron colocados el *verde,* el *anaranjado* y el *violeta,* colores binarios (sic) formados por la mezcla a partes iguales (?) de los tres colores simples dos a dos (1).

Los tratadistas generales se encuentran con no saber precisamente si los colores primarios son: el rojo, verde y violeta; o bien el rojo, verde y azul; o el rojo, amarillo y azul; o el rojo, amarillo, verde y azul... dejando aparte si ha de contarse o no con el blanco o con el blanco y el negro (2).

3. *El espectro puro.* — Es de conocimiento elemental que se considera *puro* un espectro solar cuando las rayas de Fraunhofer se distinguen con precisa nitidez. Esas rayas son otras tantas imágenes enfocadas de la rendija admisora del haz de luz blanca, y es condición necesaria que el ancho de la rendija sea mínimo, porque sinó las imágenes, *aun cuando enfocadas,* se confunden y se obtiene un espectro *impuro,* pues es de observar que, cuando se proyecta la imagen de una rendija iluminada mediante interposición de una lente positiva, la precisión del enfoque no varía, evidentemente, aun cuando se varíe el ancho de la rendija; pero si se intercala un prisma o red de difracción, las variaciones del ancho de la rendija *modifican la nitidez de la imagen espectral que se obtiene.* Estas modificaciones son consecuencias inherentes al fenómeno mismo de la dispersión.

En rigor y en abstracto, un espectro perfectamente nítido *(puro)* requeriría proceder de una rendija infinitamente angosta; pero en esas condiciones, la cantidad de luz admitida sería infinitamente escasa y, por consiguiente, sería invisible el espectro proyectado. Una mayor cantidad de luz es necesaria, con parcial sacrificio de la pureza, y esa cantidad no puede ser menor que la suficiente para causar una sensación bastante apreciable en el órgano visual. De aquí que todos los espectros observados son una transacción, más o menos tolerante, entre las exigencias de la pureza y la luminosidad; y no hay para esto otra regla establecida que la de la estimación personal.

Cuando se estudian los espectros con fines de análisis químico, u otros en que la atención vaya estrictamente a la observación de las

(1) Klincksieck et Valette, *Code des couleurs,* página 20. Ver análogamente Chevreul, *Des couleurs,* páginas 8-12, París, 1864.

(2) Ver, por ejemplo, Ovio, *Scienza dei colori,* Milán, 1927, página 313, y también Ladd Franklin, *Colour and Colour Theories,* página 29.

rayas de absorción o emisión, las condiciones empleadas son de gran pureza, puesto que la técnica fotográfica que se emplea permite reducir grandemente la luminosidad y registrar, no obstante, las imágenes, debido a la acumulación del efecto de la luz sobre la placa a favor de largas exposiciones. Pero cuando se estudian los espectros con fines de investigación cromática, que reclama principalmente la observación directa, no es posible utilizar aquella ventaja porque el efecto de una observación prolongada no se acumula en la retina del modo como en una placa fotográfica es acumulado. Así es que los espectros directamente observados son siempre más impuros que los que fotográficamente pueden obtenerse y son usualmente obtenidos. La técnica del llamado por antonomasia « análisis espectral » es, por eso, mucho más precisa que la del « análisis cromático ».

La impurificación del espectro, al hacerlo más luminoso mediante el ensanchamiento del haz originario, proviene del entrecruzamiento de los rayos emergentes del prisma, por causa de sus diferentes ángulos de refracción.

Los espectros observados por Newton fueron considerablemente impuros; a tal punto, que no se percató de las rayas de absorción que, con una mejor técnica, fueron más adelante descubiertas por Wollaston y especialmente por Fraunhofer. La técnica recomendada por Newton para producir un espectro « puro » (que todavía es recomendada como clásica en los tratados generales), no da el resultado que se le supone. Consiste ella en interponer una lente positiva acromática entre la rendija admisora y la pantalla, además del prisma, para formar la imagen espectral. Dice Newton que así « se obtienen, sin penumbras los lados rectilíneos de la imagen », lo cual es cierto; pero yo deseo advertir que ello no implica que, en el sentido longitudinal del espectro (el único que interesa), la nitidez de las contiguas y sucesivas imágenes de la rendija sea igualmente satisfactoria, pues es en ese sentido en el que las imágenes resultan más o menos superpuestas por la dispersión, la cual no afecta a la definición de la imagen en los límites transversales de la misma. Tan es así que, siguiendo estrictamente la regla de Newton se puede tener, si la rendija es ancha, un espectro grandemente impuro, bien que sus bordes longitudinales sean perfectamente nítidos.

En esas condiciones de notable impureza (Newton proyectaba, en el mejor caso, imágenes de una rendija de $^1/_{10}$ de pulgada), es natural que él viera un espectro de siete colores, como el que ha descrito y hecho tradicional; y que la generalidad de los observadores, cuando

desean ver bien un « verdadero espectro », tiendan a colocarse en las mismas condiciones.

Sin embargo, un *verdadero* espectro es un espectro puro; y, para observarlo, es un método bastante satisfactorio el descrito por Wollaston, que le mostraba solamente cuatro colores discernibles. Su técnica es sumamente simple y eficaz. El haz de luz solar reflejada por una superficie blanca y pasando por una rendija mirada a través de un buen prisma, produce a la vista un espectro muy luminoso y tan puro como se desee, aun cuando la rendija sea tosca y no particularmente angosta ni de anchura determinada, pues para disminuir su anchura relativa basta el efecto perspectivo resultante de alejarse de la rendija.

Young reconoció la excelencia de este método (que injustamente parece no ser hoy empleado) en un pasaje que luego he de transcribir.

El espectro así observado, o en un espectroscopio propiamente empleado, puede considerarse *prácticamente* puro cuando por el suficiente alejamiento de la rendija (o por su estrechamiento en el espectroscopio) se llega a un límite que, si fuera traspasado, la imagen dejaría de ser propiamente visible. Este punto se alcanza en el espectroscopio cuando aparecen muy pronunciadas estrías longitudinales debidas a las inevitables irregularidades y polvillos de la rendija, circunstancia que molesta a la observación, y por eso considero preferible el dispositivo de Wollaston que no presenta tal inconveniente.

El espectro prácticamente puro de la luz blanca nos muestra una banda roja muy obscura en el extremo inicial, pero que luego continúa sensiblemente homogénea o igual a sí misma hasta la proximidad de la raya *D*. Inmediatamente continúa una banda verde también homogénea, salvo en sus extremos; y, por último, una banda de color azul avioletado que termina con tono más avioletado aún, si bien cada vez menos luminoso, hasta concluir en completa obscuridad. Los rastros de luz que más allá han observado diversos autores, distinguiéndolos con el nombre de gris lavanda, lo mismo que otros han creído ver un tanto purpúreo el extremo más obscuro del rojo, son atribuídos a luz blanca difusa en la masa del prisma, o de cualquier modo en el interior del espectroscopio. Sea o no cuestionable la existencia de dichos colores en el espectro, lo cierto es que carecen de influencia cromática efectiva por su tan mínima y dudosa perceptibilidad.

Entre las bandas roja y verde se nota una sección muy estrecha, y no muy luminosa, de color amarillento, que en breve trecho se esfuma hacia el rojo por un lado y hacia el verde por el otro, a través de brevísimas transiciones anaranjadas y amarillo-verdosas.

Entre las bandas verde y azul-violáceo, hay una sección azulada, también bastante angosta y particularmente obscura, algo más obscura que el mismo azul-violáceo, que ya de por sí es notablemente más obscuro que el rojo y el verde. Esa sección azulada tiene también sus correspondientes transiciones hacia el verde y el azul-violáceo.

Pero, de todos modos, lo que resalta en el espectro puro son tres bandas bien caracterizadas e importantes, correspondientes precisamente a los tres colores descubiertos como «principales» por Young, designándolos *rojo, verde* y *violeta*.

Cuando la rendija es más abierta de lo conveniente para la producción de un espectro puro, éste, como he dicho, se impurifica por el cruzamiento y mezcla de las radiaciones correspondientes a los diversos colores del espectro puro. La longitud total del espectro aumenta, apareciendo relativamente más alargadas y brillantes las secciones del amarillo y del azul, y especialmente acortada la sección verde, la cual llega a desaparecer, apareciendo en su lugar una banda blanca, en un espectro más impuro aún.

Para explicarme el modo de producción de estos fenómenos, me he servido del dispositivo y experimentos que voy a describir.

4. *Descripción del aparato y primer experimento.* — Coloqué una luz eléctrica puntiforme en una caja pintada de negro en su interior, y con una sola abertura obturada por una placa portadora de una rendija vertical (*h*) de anchura variable. Exteriormente, y tan cerca como es posible de la rendija, un prisma del sulfuro de carbono, (*p*) ; recibiendo el espectro así formado sobre un papel blanco fijado a un tablero casi horizontal, tocando al prisma por un lado y algo levantado en el opuesto. De ese modo, el haz refractado pinta sus trazas a lo largo del papel (fig. B).

Observé las variaciones que se producen en la marcha de los rayos diversamente coloreados al variar la anchura de la rendija. El haz espectral aparece claramente en forma de abanico sobre el papel, y puede ser interceptado en cualquiera de sus partes por una regleta prismática (*r*), preferiblemente triangular y con la cara frontal pintada de blanco (o forrada de papel blanco) en la que más claramente aún se observan la posición y límites de los colores proyectados por el prisma refractor. Se pueden así marcar con un lápiz los puntos de paso necesarios para determinar cada recta limitante de colores. Reemplazando las hojas de papel en el tablero, registré diversos espectros correspondientes a diversas aberturas de la rendija. La

separación de los colores entre sí es bastante precisa y, por lo tanto, la señalación de las diversas bandas cromáticas es fácil y poco dudosa. Para comodidad de la referencia, mantuve fijo el borde de la rendija correspondiente al lado de los rayos rojos, variando solamente el del lado correspondiente a los más refrangibles. Así obtuve las figuras de la lámina I, que se corresponden con las secciones espectrales representadas en la lámina III; advirtiendo que, para facilitar la representación y estudio, la escala transversal de las láminas I y II

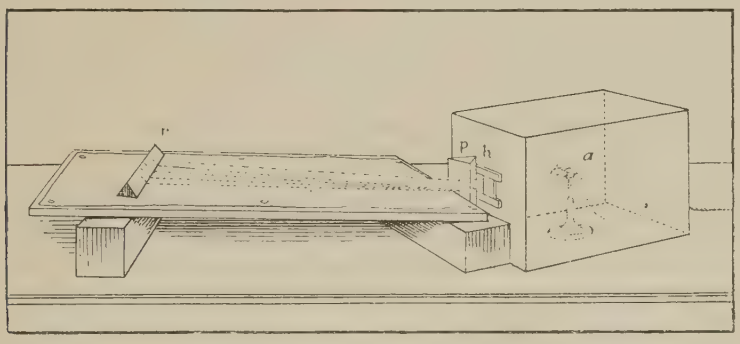


Fig. B. — El aparato de proyección

está aumentada al doble de la longitudinal y la de la lámina III, a cuatro veces.

Observando las figuras **1** de las láminas I y III, vemos que ese espectro, correspondiente a la menor anchura de rendija empleada, presenta los caracteres comunes a todo espectro prácticamente puro. Designo *escarlata* (S) la primera banda; *verde* (G) la segunda y *ultramar* (U) la tercera (1).

(1) Considero muy conveniente permitirme estos cambios de designación, aun cuando en verdad corresponden a los colores designados por Young, *red, green* y *violet*. La razón es que la palabra *rojo* ha tomado en el uso una acepción demasiado lata y crea mucha confusión designar con la misma palabra el rojo espectral (semejante al pigmento bermellón) y el tono llamado «rojo primario» en la técnica de la tricromía, que es notablemente purpúreo o carminado. Aprovechando el empleo hecho por Maxwell de la palabra *scarlet* para el rojo espectral, adopto esa palabra y el símbolo S para distinguirlo.

El color de la banda central del espectro está bien representado por la palabra *verde*, que no ha dado lugar a semejantes confusiones. Cuando se habla de una cosa propiamente verde, siempre se entiende un color semejante al que domina en esa banda del espectro, pues para tonos diferentes se usan más bien palabras compuestas como verde-azul o verde-amarillo.

En cambio, me ha parecido indispensable adoptar la palabra *ultramar* y el sím-

En ese espectro, como en todos los puros, las bandas amarillenta y azulada son muy angostas y no muy luminosas, y también se nota un tono marcadamente violáceo en el extremo del color ultramar.

Al abrir más la rendija, corriendo el borde del lado ultramar U y dejando siempre fijo el del escarlata, S, vemos que el ancho y luminosidad de los colores intermedios entre S y G, y entre G y U han aumentado en extensión y luminosidad. Aparece francamente el color *amarillo* (Y) y un color de aspecto entre verde y ultramar, que llamaré *turquesa* (T) (1).

El color S y el U permanecen de la misma anchura en las diversas aberturas de la rendija, mientras que el verde disminuye gradualmente a la vista y termina por desaparecer (figs. **3** y **4**).

Continuando el proceso, vemos que desde la figura 4 aparece una

bolo U, para designar el color dominante en la tercera banda espectral, aun cuando Young adoptó la de *violeta*. Ese color da lugar a muchas confusiones (particularmente en los autores de idioma inglés) al punto de que, enumerando y refiriendo al mismo Young sus tres colores principales, hay autores que lo llaman *blue* y otros *violet;* y todos se refieren al mismo color, es decir, al que podemos entender que Newton llamó preferentemente *indigo*, aunque también usó las palabras *blue* y *violet* indistintamente. He formado la siguiente lista que muestra la necesidad de abandonar las palabras «azul» y «violeta» para designar ese color *principal* del espectro puro, reservándolas para otros que les son contiguos: Newton : *blue, indigo, violet;* Wollaston : *blue;* Young : *violet*; Helmholtz : *violett;* Maxwell: *blue;* Abney: *violet;* Rayleigh: *blue;* Rosenstiehl: *bleu;* Ladd Franklin : *blue, violet.*

El color en cuestión se asemeja mucho a los especímenes más avioletados del pigmento azul ultramar, y por eso entiendo que la palabra *ultramar* fija suficientemente la idea del color a que me refiero.

En consecuencia, en lo sucesivo usaré las palabras *escarlata*, *verde* y *ultramar*, y los símbolos S, G y U para designar los colores que predominan en cada una de las tres bandas principales de un espectro prácticamente puro de la luz blanca, presuponiendo que las sensaciones correspondientes son prácticamente iguales para toda visión normal. Esos tres colores están bien representados por los gránulos de las placas fotográficas autocromas.

(1) También creo necesario adoptar una palabra especial para designar este color, que no existe de modo bien caracterizado en los espectros puros. Es un color que, en diversos idiomas, es designado *vert-jade, verde-hielo, peacock-blue, turquesa, pers, Italian-blue* o *verde-azul*. Los fabricantes de colores para pintar o imprimir prefieren, generalmente, las palabras *turquoise* (Reeves, Lorilleux) para designar un pigmento de aspecto muy semejante a los especímenes más verdosos de la piedra turquesa, si bien ésta es más blanquecina que dichos pigmentos y, por supuesto, que el color espectral correspondiente. Mucho se parece también a soluciones concentradas de sulfato de cobre, pero la palabra *turquesa* determina suficientemente la idea del tono que nos muestra el espectro.

sección blanca (W) que luego sigue aumentando siempre; y que las bandas Y y T, una vez alcanzada la anchura que tienen en la figura 4, continúan constantes, lo mismo que las S y U. Después de la figura **4** sólo es W la que aumentará.

Debo advertir que a esta clase de espectros, sean más o menos puros o impuros, formados por un haz *continuo* de luz, pasando a través de una rendija *simple, positiva,* los llamo *directos;* y llamaré *inversos* a los formados por un haz *interceptado* o *discontinuo,* pasando a través de una rendija *negativa,* de los que trataré más adelante.

5. *Interpretación de los espectros directos.* — La interpretación que a mi juicio corresponde a los fenómenos experimentados, se comprende claramente por medio de las rayas que he trazado atravesando los espectros figurados en las láminas. (Referencias en la lámina III).

Comparando la figura **2** con la figura **1** (lám. I), es evidente que si hemos dejado inmóvil el borde de la rendija correspondiente al lado representado superior *(escarlata)* y hemos desplazado un poco hacia abajo el otro borde, el rayo 1 (extremo superior del *escarlata* y límite exterior del espectro por ese lado) no se ha movido; pero el rayo 2 ha avanzado hacia abajo, y sigue bajando en cada figura sucesiva.

El rayo 3, límite superior del *verde,* permanece inmóvil en todas las figuras; pero el rayo 4, su límite inferior, sigue en cambio bajando.

El rayo 5, límite superior del *ultramar,* queda igualmente inmóvil, y es el otro extremo 6 el que desciende.

Estos movimientos, consecuencias necesarias del ángulo de refracción propio de cada rayo, determinan cruzamientos como están representados por las rayas coloreadas verticales. Donde hay cruzamientos o mezclas de rayos escarlata y verde, se produce *amarillo;* los de verde y ultramar producen *turquesa;* y los de S, G y U producen blanco (W). Dondequiera que se ve S, es simplemente porque los rayos G no pueden alcanzar. Dondequiera que se ve Y, es porque no alcanzan los rayos U pero sí los S y G; donde se ve T es porque no alcanzan los rayos S pero sí los G y U, etc.

Es interesante observar la desaparición visual del verde, a cierto grado de impurificación del espectro (fig. **4**, láms. I y III). Pero esto no significa que hayan desaparecido las radiaciones verdes sino que ahí figuran solamente en mezclas dobles y triples con las S y U, de tal modo, que la región abarcada por las radiaciones G la vemos amarilla, blanca y turquesa.

Es cierto que entre escarlata y amarillo hay una pequeña transi-

ción de color anaranjado (O), como entre T y U hay una azul (B), y lo mismo entre cada par contiguo. Pero esas transiciones no aumentan de importancia, cualquiera que sea la abertura de la rendija; quedan siempre como efectos de paso que no intervienen en los fenómenos importantes causados por la variación del ancho de la rendija.

Si queremos, pues, considerar como completo un espectro puro, para explicárnoslo nos basta admitir que está formado (en cuanto al orden sensorial cromático) por *tres* clases de radiaciones : S, G, U. Si queremos considerar como completo el espectro que contenga francamente acusados los colores dobles de cruzamiento, tenemos (figs, **2** y **3**) que está formado por *cinco* colores visibles : S, Y, G, T, U. Si queremos contar también las transiciones de rango menor, entonces tenemos que está formado por *nueve* colores : S, O, Y, L, G, E, T, B, U. Podríamos, si quisiéramos, intercalar más transiciones de categorías inferiores, indefinidamente, hasta donde alcance la capacidad de discriminación del órgano visual.

Pero es cierto también que *es suficiente admitir la existencia de tres clases de radiaciones, para explicarse todos los fenómenos cromáticos que un espectro directo puede presentar.*

No sería necesario admitir la existencia de radiaciones simples *amarillas* y *azules,* para que dichos colores y sus mezclas aparezcan bien visibles en el espectro y en la Naturaleza; aun cuando yo admito que ellas existen, sin embargo, como luego explicaré. Existen, pero no son indispensables para tener toda la serie de las *sensaciones* cromáticas; y su acción cromática es insignificante.

Queda, de paso, demostrado que ha sido un error secular pretender *leer* en el espectro *siete* colores. O son 3, o son 5, o son 9, o son muchos más, según la categoría en que queramos detenernos, pero nunca son 7.

Hay en el espectro directo colores *simples* S, G, U, y *dobles típicos,* Y, T. Los de transición, O, L, B, E, son también dobles, en los que uno de los componentes de la mezcla predomina sobre el otro. Por eso llamo : *típicos* (además de los simples) a los dobles, como Y, T en que la mezcla es a dosis iguales o equivalentes, y a los otros simplemente *transiciones* o *colores transitivos.*

A los colores simples y dobles los llamo *puros,* toda vez que no intervenga en ningún grado un tercero para formar blanco. Cuando este tercero interviene, la mezcla pierde su carácter propiamente cromático y se neutraliza o «decolora», por así decirlo. A estos colores en que intervienen tres clases de radiaciones simples, los llamo *triples* o ternarios. Son los *neutros* (blanco y grises) y los *agrisados;*

en estos últimos la mezcla no es perfectamente equilibrada y queda predominando alguno de los simples o un par de ellos. En los neutros hay siempre equivalencia.

Los espectros usualmente estudiados, descritos y figurados como puros, son del género de los de la figura **2**. Son, por lo tanto, espectros acentuadamente impuros, un caso particular e indefinido de los espectros impuros, y así la mayor parte de las observaciones y deducciones publicadas carecen de valor general o fundamental. Las cifras y curvas de luminosidad admitidas, por ejemplo, que atribuyen al amarillo del espectro una alta luminosidad, no tienen sentido si las referimos al verdadero espectro, al *puro,* ni siquiera al prácticamente puro.

Puede asegurarse que, en general, los investigadores de la cromática, desde Newton hasta nuestros días, han trabajado sobre espectros indistintamente puros e impuros sin percatarse de la confusión y sus graves consecuencias.

En las memorias originales de muy importantes investigadores se halla comprobación de esta inadvertencia; y a ella atribuyo las dificultades que hasta hoy se encuentran en las bases mismas de la ciencia cromática, que han impedido su mayor progreso. Hay mucho trabajo cuidadoso en los detalles pero, hasta donde yo conozco, falso en las bases de la experimentación.

Ya he mencionado (pág. 12) que Newton trabajaba con espectros de pureza muy deficiente. Así se explica que en su figura 33 (pág. 124, ob. cit.) aparezca el amarillo con extensión poco menor que la del rojo. Es un espectro intermedio entre los de mis figuras **2** y **3**, notablemente impuro.

Abney y Festing, describiendo las condiciones de sus investigaciones sobre la luminosidad relativa de los colores espectrales (1). dicen:

> El punto más importante para medir estrictamente, era el de ajustar la luminosidad de modo que fuese de tal grado de brillantez que el ojo pudiera fácilmente distinguir cualquier pequeña diferencia en la brillantez de las sombras iluminadas. Esto fué efectuado por medio de *alterar la anchura de la rendija en el colimador de tiempo en tiempo.* Cuando la parte más brillante del espectro estaba sometida a mensuración, el ancho de la rendija era de 1/150 de pulgada; y cuando las partes menos luminosas, fué abierta a 1/30 de pulgada.

(1) *On Colour Photometry,* in *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* volumen 179, página 547.

Burch en sus, por otra parte, interesantísimos experimentos sobre la ceguera cromática artificial (1), dice :

Con un fuerte aumento y todo el largo de la rendija, de modo que el campo de visión estuviera completamente llenado con luz prácticamente monocromática (sic), *abrí la rendija a su plena anchura y*, habiendo provocado la condición de ceguera temporaria para el color, *cerré subitamente la rendija* hasta que las rayas de Fraunhofer fueran visibles; y recorriendo a lo largo el espectro, anoté rápidamente la posición exacta de los varios cambios de tono *(hue)*...

Manteniendo la rendija constantemente del mismo ancho, con un *moderado grado de iluminación*, tal como sería escogido para una cómoda observación...

Entonces *abrí la rendija* hasta que la luz fuese tan intensa como podía soportarla. Después de unos 30 segundos, el tono verde dió lugar a un cálido rojo amarillento a la izquierda y azul a la derecha. *Cerrando la rendija* hasta que las líneas fuesen netamente definidas, el verde fué visto desvanecerse enteramente (pág. 13).

En varios otros pasajes, Burch habla igualmente de este juego de abrir y cerrar; pero es evidente que no son estrictamente equiparables observaciones efectuadas en esas condiciones diversas. Los efectos producidos en la vista por el color que se muestra en determinado lugar del espacio observado, no deben ser atribuídos al color que en el mismo lugar aparece al angostarse más la rendija, porque usualmente son distintos uno y otro.

Von Kries, describiendo el aparato inventado por Helmholtz para mezclar colores, usado por König, Nagel y von Kries mismo, y recomendado por Southall y Ladd Franklin como « el mejor aparato para mezclar colores espectrales », dice (2) :

Lo principal, con respecto al ajuste de sus rendijas, es mantener constante la línea media de la rendija, de modo a *poder alterar la brillantez de la imagen sin cambiar su color;* y así, girando el mismo tornillo, los dos bordes de la rendija son corridos por igual en ambas direcciones.

Describiendo los estudios de König con el mismo aparato, dice Helmholtz :

(1) *On Artificial Temporary Colour-Blindness, with an Examination of the Colour Sensations of 109 Persons*, in *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, volumen 191 B, 1898, página 12.

(2) Von Kries, *Apéndice*, en *Helmholtz Treatise on Physiological Optics*, New York, 1924. II, página 379 y figura 74.

Los cambios de intensidad de la luz fueron hechos de diferentes maneras con el fin de excluir *cualquier cambio de la longitud de onda* (sic) del color de comparación, en parte mediante alteración de la posición del nicol, en parte mediante el ensanchamiento *de las rendijas del colimador*. Este ensanchamiento de la rendija tuvo lugar de acuerdo a la construcción del aparato, igualmente de ambos lados (1).

Maxwell, por su parte, no indica la dimensión que empleó en su caja para la mezcla de colores espectrales, pero Rayleigh advierte (2) que, con tal aparato, no pueden aplicarse aberturas menores de 1/5 de pulgada para conciliar las exigencias de la luminosidad con las de la pureza, lo cual es cuestión de transacción *(compromise)*.

Se comprende por lo transcrito *(itálicas mías)* que esos investigadores no han advertido que, al cambiar los anchos de las rendijas, *ya no es el mismo espectro el que se observa* sino otro distinto, y no son las observaciones comparables entre sí. No es cierto tampoco, aunque lo hayan creído Helmholtz y sus continuadores, que con tal de «mantener constante la línea media de la rendija» no es cambiada la longitud de onda de los rayos observados. Mis experimentos aquí descritos demuestran que, aunque se mire el mismo lugar de una escala superpuesta a un espectro, si se modifica el ancho de la rendija vienen a cruzarse o se retiran del lugar observado radiaciones de diversas longitudes de onda; el resultante color observado ya no es el mismo y es falsa la comparación cromática hecha sobre el supuesto de no haber cambiado.

Las figuras del espectro presentadas en los tratados generales y especiales son, además de bastante dispares, todas falsas; lo mismo que los espectros que en los laboratorios de enseñanza se acostumbra producir para la práctica de la observación cromática. Y es tanto más notable esta inadvertencia, cuanto que no había escapado a la genialidad de Young llamar la atención sobre ella:

> Si el ancho de la rendija, mirada a través de un prisma, es algo aumentado, el espacio ocupado por cada variedad de luz en el espectro es aumentado en la misma proporción *y cada porción avanza sobre los colores vecinos y es mezclada con ellos.* Así el rojo es seguido por el anaranjado, amarillo y verde-amarillento, y el azul está mezclado, por un lado con el verde y por el otro con el violeta; *y es en este estado* como el espectro prismático es comúnmente exhibido (3).

(1) Citado por Peddie, *Colour Vision*, página 89.

(2) En *Nature*, volumen 25, noviembre 17, 1881, página 64.

(3) *A Course of Lectures on Natural Philosophy*, 1807, página 439.

6. *Los espectros inversos.* — Hemos visto en el experimento anterior que bastan las mezclas que de los tres colores simples o primarios se efectuan en el mismo espectro directo impuro, para obtener toda la gradación de los colores comprendida entre los extremos menos y más refrangibles, y que las mezclas por cruzamiento de dos haces contiguos heterogéneos dan origen a los colores amarillo y turquesa respectivamente. Del mismo modo podemos obtener, por cruzamiento de otro par, el color *púrpura* y sus gradaciones, que faltan en el espectro directo. Basta para ello cruzar o superponer los rayos escarlata y ultramar, cosa fácil de obtener realizando lo que llamaremos el *espectro inverso.*

Para ese objeto, substituí la rendija *positiva* por una *negativa;* esto es, que la «rendija» sea opaca en vez de luminosa. Una de estas rendijas negativas, de 15 milímetros de ancho, colocada en el aparato descrito, produjo en el espectro inverso representado en las figuras **6** de las láminas II y III. Bien se comprende que las dos partes separadas por W en la figura **5**, láminas I y III, son respectivamente las dos *irisaciones,* como se las ha llamado : la *cálida* y la *fría,* que podemos ver en bordes opuestos de cualquier ventana iluminada mirada a través de un prisma. El efecto de la rendija negativa (sea un travesaño de la ventana) es trasponer ambas irisaciones. Si variamos la anchura de la banda opaca que intercepta el gran haz luminoso dividiéndolo en dos, obtendremos cruzamientos más o menos pronunciados de ambas irisaciones. Es eso lo que muestran en serie las figuras **6-10** de las láminas II y III.

Cuando la rendija negativa fué angostada a 8 milímetros en el aparato, los rayos ultramar y escarlata comenzaron a cruzarse dando origen al color *púrpura* (P), tercera mezcla posible de los tres primarios. Avanzando la mezcla (fig. **8**) el escarlata desaparece a la vista; y según va avanzando más el proceso ascensional de la parte inferior de las radiaciones escarlata y verde (pues suponemos las ultramar en lugar constante), llegan a desaparecer a la vista los tres colores simples o primarios y sólo vemos sus mezclas binarias y ternarias (fig. **10**), bien que algunas pequeñas porciones de ultramar y escarlata quedan todavía sin cruzar y, por lo tanto, visibles en el arranque del haz proyectado por el prisma (fig. **10**, lám. II).

Se comprende que, en los espectros impuros, el grado de cruzamiento de los rayos depende del lugar en que se haga la sección del haz proyectado, pues es evidente la igualdad de las secciones a, a', a'', a'''; b, b', b''; y c, c' de la lámina I, y las a, a', a'', a''', a''''; b, b', b'', b''';

c, *c'*, *c''*; *d*, *d'* de la lámina II. En realidad, la proyección **2** de la lámina I compendia todas las que la siguen, lo mismo que la **10** de la lámina II compendia todas las que la preceden, bien que con ellas solas no habría sido tan clara la demostración de los fenómenos.

7. *El círculo cromático y la significación del color púrpura.* — De los precedentes experimentos se desprende la analogía, por su doble naturaleza, del color púrpura con los amarillo y turquesa, teniendo igualmente el púrpura sus transiciones *carmesí* (C) y *violeta* (V) hacia

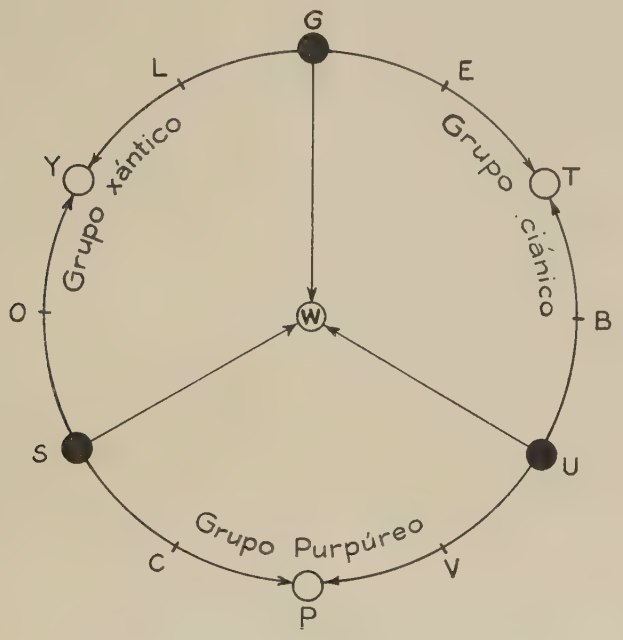


Fig. C. — Círculo cromático justificado

el escarlata y el azul; y así queda completa la gama de los tonos o *colores puros típicos* que existen para nuestra vista. Y todos los innumerables colores que nos presenta el universo son variantes de ellos.

El precedente experimento y demostración me parece que sitúan y dan legitimidad de categoría al color púrpura, tenido hasta hoy como anómalo. No es, en efecto, más anómalo que los otros dos dobles: el amarillo y el turquesa. La única anomalía que puede señalarse al púrpura, con relación al amarillo y turquesa, es muy relativa, y consiste en que no hay para aquél en el espectro ningunas radiaciones simples que lo produzcan, sinó que siempre es compuesto por dos

especies de ellas. Pero es el caso que el amarillo y turquesa producidos por respectivas radiaciones simples carecen de importancia cromática, como luego veremos, y sólo cuentan realmente el amarillo y el turquesa dobles en los efectos de la coloración. Considerados en este carácter, son positivamente equiparables el *amarillo,* el *turquesa* y el *púrpura.*

Este concepto resuelve, a mi ver de modo definitivo, la cuestión de la lógica ubicación de los tonos en el círculo cromático, permitiendo situar legítimamente : los tres colores simples en los vértices de un triángulo equilátero inscrito, y los dobles en lugares intermedios (fig. C).

Se sabe a cuántas tentativas frustradas, por arbitrarias, ha dado lugar hasta el presente la representación de los colores en un círculo u otro plano. Y advierto que esa ubicación es la que les asigno en cuanto *tonos* meramente, sin hacer cuenta de su *luminosidad relativa,* carácter que no está considerado en este caso por no ser compatible con una representación en dos dimensiones, que dejaría sin lugar a todos los grises y agrisados.

Nótese que, en el círculo que propongo, los colores complementarios están rigurosamente opuestos diametralmente, y también que los colores azul (B) y violeta (V), ocupan lugares de tercera importancia, como meras transiciones que son, según mi teoría.

8. *Homogeneidad cromática de las bandas primarias.* — Del hecho de haberse trabajado usualmente en cromática con espectros bastante impuros, como lo he demostrado, ha nacido y perdura la tradicional opinión de que, en « el espectro », la variación de tonos a lo largo del mismo es continua y más o menos regularmente graduada. Investigaciones modernas sobre la capacidad de discriminación cromática han mostrado que hay marcada intermitencia en el grado de variación perceptible ; y Steindler (1), haciendo promedios de las apreciaciones de varias personas, ha obtenido cifras cuyos valores extremos están representados en el gráfico figura D. Otros autores también han procurado contar el número de colores discernibles en un espectro; pero no se ha dado razón, que yo sepa, sobre la causa de la desigual continuidad de la discriminación.

Es de notar, considerando la curva trazada por Nutting, resultante del espectro estudiado por Steindler (sobre cuyo grado de pureza no

(1) Citado por Parsons, *Introduction to the Study of Colour Vision,* 2ª edición, Cambridge, 1924, páginas 34 y 242.

hay información), que la abundancia de discriminaciones es mayor, precisamente en las zonas Y, T, que llamo confinantes, donde las mezclas de luces primarias se producen; y que las mayores distancias requeridas para percibir una diferencia están en las zonas correspondientes a los colores simples S, G, U. Conviene tener presente que, las ramas ascendentes, desde los puntos mínimos han sido trazadas por Nutting, uniendo los puntos de máximos y mínimos mediante «curvas suaves», pasando por los puntos intermedios calculados (1).

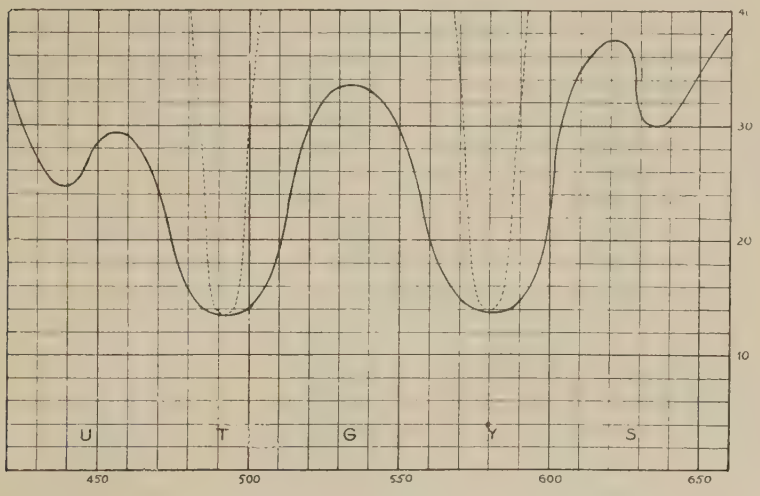


Fig. D. — Gráfico de las mayores y menores diferencias de tonos perceptibles en el espectro. Las abscisas representan longitudes de ondas; las ordenadas, diferencias perceptibles (Steindler-Nutting).

La simple observación de un espectro puro sugiere que las pendientes de las curvas han de ser notablemente más precipitadas, al modo que estimativamente indico con líneas punteadas.

Mi interpretación del espectro puro, robustecida por estas observaciones y las que seguirán, es que debemos considerarlo *esencialmente* formado por tres masas compactas, homogéneas, de los tres colores simples. Yo infiero que nuestro órgano visual es capaz de ser impresionado con la sensación de verde, por ejemplo, producida por cualesquiera radiaciones situadas, digamos, desde la longitud de onda 570 $\mu\mu$ hasta 500 $\mu\mu$, bien que en los extremos de esa serie la sensación sea menos franca.

(1) Nutting, P. G., *Bull. Bur. Stand.*, 1909, página 91. Parsons, *loc. cit.*, página 35.

Podemos interpretar que en nuestro sensorio (sea químico o de otra clase el mecanismo de la sensación), se produce la sensación de verde cuando alguna clase de «sintonía» se efectúa en relación con el número de vibraciones comprendidas en la serie de ondas dicha, y que el efecto de esa sintonía es suficientemente homogéneo a nuestra percepción como para ser indiscriminable en la mayor parte de la extensión de la zona verde. Nuestra retina, supongamos, contiene elementos capaces de reaccionar de cierto modo ante excitaciones de la frecuencia comprendida en las cifras dadas, y no reaccionar o «resonar» ante excitaciones no comprendidas entre esas cifras, al modo que un efectivo resonador acústico tiene un margen más o menos lato de resonancia, por encima y por debajo de un determinado número de vibraciones aéreas. Hacia los límites de esa serie de vibraciones aéreas, la resonancia es imperfecta; y así, imperfectamente se percibe; pero en la mayor extensión de la serie la resonancia es sensiblemente *indistinta*.

No sería así cierto que a cada longitud de onda corresponda una exclusiva sensación de color, pues largos trayectos del espectro *puro* nos presentan *el mismo color;* observación que ya había hecho Young cuando dijo que « los colores [principales] difieren muy escasamente en cualidad dentro de sus límites respectivos ».

Las consideraciones hechas con respecto al verde, pueden por supuesto ser en general aplicadas al escarlata o al ultramar.

Esta opinión sobre la compacidad u homogeneidad cualitativa de las sensaciones que nos producen las bandas primarias del espectro, la encuentro confirmada en las observaciones de Maxwell sobre la mezcla de tríadas de colores susceptibles de aparejarse con blanco (1). Yo he convertido en gráficos las tablas numéricas de ecuaciones dadas por Maxwell, y veo que sus diversas ecuaciones (las 3, 4, 5 y 6, del gráfico lámina IV), se producen aun cuando varíe de posición uno de sus tres términos dejando constantes los otros dos. Esto significa que, si el color llamado *Blue* de la observación 3 por ejemplo, puede ser substituído por los de las observaciones 4, 5 ó 6, aunque éstos ocupen distinto lugar y extensión en el espectro, quiere decir que cualitativa y cuantitativamente, en cuanto a su acción sensorial, dichos términos de *Blue* e *Indigo* son iguales, dado que figuran en

(1) Maxwell, J. C., *On the Theory of Compound Colours and the Relations of the Colours of the Spectrum,* in *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, 1860, volumen 150, páginas 65 y siguientes.

miembros cuyos otros términos *Scarlet* y *Green* no han variado apreciablemente, y que esos miembros son, a su vez, iguales a una misma cantidad de luz blanca, que es dada como miembro invariable de todas las ecuaciones.

La misma deducción podemos hacer comparando las ecuaciones (29), (30) y (31) de la figura E. Con respecto al escarlata, son equiparables los términos de las ecuaciones (6) y (18) de la lámina IV; y con respecto al verde, las (24) y (33) de la figura E.

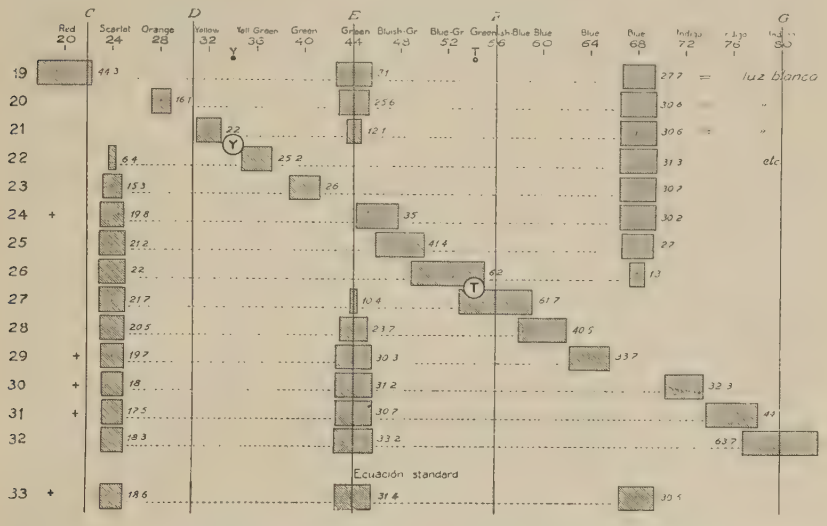


Fig. E. — Ecuaciones de tres luces espectrales y luz blanca. Los números al lado de cada rectángulo indican la cantidad de luz respectiva que interviene en la luz blanca compuesta por la tríade a que corresponde, equivaliendo ésta a una dada luz blanca natural. Los números a la izquierda designan las ecuaciones. Los números arriba indican una división convencional del espectro observado, en 80 partes iguales. (Diagrama trazado según cifras de Maxwell, cuadro IV, *Phil. Trans. Roy. Lond.*, 1850, pág. 65.)

Demuestran los hechos presentados la escasa validez de la primera de las proposiciones fundamentales de Newton, puesto que si, por lo común «los rayos que difieren en color difieren también en refrangibilidad», la recíproca no es cierta, puesto que *rayos que difieren en refrangibilidad no difieren en color.*

Sin embargo, la mente de Newton fué (y así es siempre entendido), que a cada cambio de refrangibilidad corresponde un cambio de color y vice-versa, pues así expresamente lo explicó (ver nota 2, pág. 6), afirmando que «los rayos siempre concuerdan exactamente en ambas cosas, o bien difieren proporcionalmente en ambas».

Por otra parte, mezclas de rayos de distintas refrangibilidades producen colores iguales a los de otra refrangibilidad dada (caso del amarillo y todos los demás dobles); de manera que tampoco por ese lado es cierta la unidad de correspondencia entre colores y refrangibilidades que la proposición de Newton ha querido significar.

Se desprende, además, que es un falso problema pretender localizar precisamente (nada menos que al diezmillonésimo de milímetro) la longitud de onda que corresponda a cada uno de los colores, dado que *un mismo color es producido por radiaciones situadas en distintos lugares del espectro.* Los términos de la « ecuación standard » de Maxwell, por ejemplo, no tienen por qué estar precisamente situados en el lugar que les asigna.

9. *El caso del amarillo simple y su luminosidad.* — Necesito tratar aquí la cuestión de si hay o no, en el espectro puro, radiaciones *simples* capaces de producirnos la sensación de amarillo.

Hasta donde yo he podido constatarlo, queda siempre en el espectro, por más puro pero todavía observable que se lo produzca, una estrechísima banda de color amarillo no muy brillante. Hay también el hecho indudable de que la luz de sodio es sensiblemente amarilla, y que sus radiaciones proceden de una raya o de un grupo de rayas tan angosto que bien podemos considerarlas como radiaciones simples.

La cuestión que se presenta es, entonces, que el color amarillo puede producirse por dos vías : la mezcla de radiaciones escarlata y verde, o por radiaciones simples. Lo cierto es que, ajustando las intensidades respectivas, por ambos medios podemos producir sensaciones iguales de amarillo.

Esto ya lo observó Young en el pasaje citado, nota 1, página 9; y también hace mención de la persistencia, para Wollaston irreductible, de radiaciones amarillas simples en el espectro tan puro como pudo producirlo (1).

(1) YOUNG, *Op. cit.*, páginas 439 y siguientes. « Ha sido generalmente supuesto, desde tiempo de Newton, que cuando rayos de luz son separados tan completamente como es posible por medio de la refracción, muestran siete variedades de color, relacionadas una con otra, respecto a la extensión que ocupan, en proporciones análogas a las de la escala ascendente del modo menor en la música. Las observaciones fueron sin embargo imperfectas, y la analogía fué totalmente imaginaria. El doctor Wollaston ha determinado la división de la imagen coloreada o espectro de una manera mucho más precisa que lo ha sido anteriormente. Mirando a través de un prisma hacia una estrecha línea de luz, produjo

Otros autores han observado ese doble modo de originarse la sensación de amarillo, pero no conozco que se haya dado explicación satisfactoria del fenómeno.

Rayleigh (1) hace notar que «algunos son incrédulos sobre la efectiva existencia del amarillo *compuesto*», y piensa que «los tres elementos primarios de color, corresponden próximamente con el rojo, verde y azul»; pero queda perplejo ante el caso del amarillo, suponiendo que puede haber uno compuesto y otro simple. En los hechos observa que la mezcla de rayos rojos y verdes resulta a la vista perfectamente igual que el amarillo homogéneo de luz del sodio (2).

El mismo autor fué capaz de obtener una solución coloreada amarilla que, sin embargo, estaba totalmente privada de las radiaciones amarillas del espectro.

Mezclas de una solución de tornasol o de una solución de sesquicloruro de cromio con cromato de potasio, aislan las porciones verde y roja del espectro, eliminando el amarillo y anaranjado que existen entre ellos. En adecuadas proporciones, cualquiera de ellas da un muy franco amarillo compuesto que, sin embargo, está libre de cualquier luz elemental de color amarillo (3).

Sir Ollivier Lodge observa (en *Nature,* enero 12 de 1924), que se puede proyectar una mancha de luz amarilla formada por superposición de luces roja y verde, e igual a otra de amarillo puro. «El ojo no las distingue, aunque el prisma sí».

Burch, en el trabajo citado, sobre la fatiga cromática, dice :

No hay sensación especial de amarillo. El amarillo resulta, o bien de la excitación simultánea de las sensaciones de rojo y verde o de la acción de una débil luz roja durante el efecto de la imagen sucesiva (after-image) verde...

una más efectiva separación de los colores que la que puede ser obtenida por el método común de proyectar la imagen del sol sobre una pared. El espectro formado de esta manera consta de cuatro colores solamente : rojo, verde, azul y violeta... Los colores difieren escasamente en cualidad, dentro de sus límites respectivos, pero varían en brillantez estando la mayor intensidad de luz en la parte del verde que está más próxima al rojo. *Una estrecha línea de amarillo es generalmente visible en el límite del rojo y verde, pero su anchura excede escasamente a la de la abertura por la que la luz es admitida,* y el doctor Wollaston la atribuye a la mezcla de la luz roja con la verde». *(Itálicas mías).*

(1) En *Nature,* enero 19, 1871, página 234.

(2) *Nature,* noviembre 17, 1881, XXV, página 64.

(3) Rayleigh, *Experiments on Colour,* in *Rep. of British Assoc.,* 1870, página 43 Sec.

... He fracasado enteramente en descubrir alguna evidencia física de una separada sensación de amarillo, aun cuando cuidadosamente la he buscado.

Edridge Green (1), dice que durante años ha hecho cuidadosos experimentos sobre los amarillos simple y compuesto, concluyendo que la sensación de amarillo es de carácter simple. Pero también observó que

La identidad del amarillo compuesto, hecho de rojo y verde espectrales, comparado con el amarillo simple, es muy notable desde el punto de vista fisiológico. He probado, sin éxito, a distinguir fisiológicamente entre los dos por medio de la fatiga cromática, adaptación de color, o imágenes sucesivas producidas por colores espectrales puros, pero el efecto del color compuesto *es, en todo respecto, el mismo que el del color simple* (2).

Ladd Franklin, en su reciente libro *Colour and Colour Theories,* 1929, admite que la mezcla de rayos rojos y verdes nos produce la sensación de amarillo, pero que dicha sensación es simple, porque entiende que es *más primitiva* que las de rojo y verde en la evolución del órgano visual. Explicación contradictoria que analizaré en un trabajo sucesivo, con otras del mismo autor.

Los argumentos más fuertes que se hacen en favor de la simplicidad de la *sensación* de amarillo (ya que la duplicidad de los *agentes físicos* capaces de producirla es innegable) son los argumentos que subrayo en la siguiente cita de Herschell (3) :

Declarar que el rojo y verde son sensaciones primarias y que el amarillo es una mezcla de ellas, es una proposición que sólo necesita ser entendida para ser repudiada, porque *un rayo amarillo, incapaz de análisis prismático en verde y rojo,* puede ser mostrado en el espectro y en llamas de sodio, y porque *ni el rojo ni el verde, como sensaciones, son sugeridas en el más remoto grado por dicho amarillo, en su acción sobre los ojos.*

Este último argumento es el principal en que se apoyan Hering y sus discípulos, y también Ladd Franklin, para atribuir el carácter de *simple* a la *sensación* de amarillo. Sencillamente, que *no nos parece* que el amarillo sea una sensación mixta de rojo y verde.

La embrollada cuestión podría encontrar camino de solución mediante una hipótesis.

(1) *Journal of Physiologie,* 1925, página 265.

(2) *Nature,* febrero 9, 1924, página 196.

(3) *Proc. Roy. Soc. Lond.,* 1859-1860, página 72.

Yo supongo que la *sensación* de amarillo es *siempre doble,* siempre *compuesta.* Que, en nuestro sensorio, es la resultante de excitaciones simultáneas de *rojo* (escarlata) y de *verde,* por las correspondientes radiaciones espectrales, pero que las radiaciones *intermedias, confinantes* son capaces de causar excitación, de «resonar», si bien no muy enérgicamente, *en ambos elementos* sensoriales propios de las sensaciones roja y verde.

Hallo en la literatura un vestigio concordante con la hipótesis precedente. En un pasaje que, por contener errores fundamentales de que luego se rectificó, no fué incluído por Young en sus *Lectures on Natural Philosophy,* dice :

> Siendo casi imposible concebir que cada punto sensible de la retina contenga un infinito número de partículas, cada una de ellas capaz de *vibrar en perfecto unísono* con cada posible ondulación, se hace necesario suponer el número limitado, por ejemplo, a tres colores principales : rojo, amarillo y azul, cuyas ondulaciones están relacionadas en magnitud próximamente como los números 8, 7 y 6, y que cada una de las partículas es capaz de ser puesta en movimiento, más o menos enérgicamente, por ondulaciones que difieran más o menos del perfecto unísono; por ejemplo, las ondulaciones de la luz verde *estando próximamente en relación de 6 1/2, afectarán igualmente a las partículas en unísono con amarillo y azul, y producirán el mismo efecto que una luz compuesta de esas dos especies;* y cada filamento nervioso sensible puede constar de tres porciones, una para cada principal color (1).

Aun cuando esta inferencia pertenece a la época en que aún creía Young que la tríade de los colores primarios fuera *rojo-amarillo-azul,* luego cambiada, a sugestión de la observación de Wollaston, por la verdadera de *rojo-verde-violeta* (en la terminología de Young), y creía también que las luces amarilla y azul pueden formar verde, como también lo creyó Newton, y es por lo tanto errónea en esos puntos, no pierde su importancia como hipótesis explicativa de la posibilidad de producirse una sensación cromática doble por la doble «resonancia» colateral motivada por la «cuasi sintonía» de ciertas radiaciones simples, que es lo que yo supongo suceder en el caso del amarillo «simple» y del turquesa «simple», en el grado que estas sensaciones de origen físico simple pueden ser producidas.

(1) *On the Theory of Light and Colour,* in *Bakerian Lectures,* 1802. (Citado por Mayer, *History of Young's Discovery of his Theory of Colors,* in *The American Journal of Science and Arts,* LII, 1875).

Porque estas sensaciones dobles causadas por radiaciones simples son, en igualdad de condiciones, como he dicho, más débiles que las que pueden obtenerse mezclando los rayos de colores simples del mismo espectro por cruzamiento o superposición.

Así resulta que la luminosidad relativa del color amarillo simple está lejos de ser mucho más alta que las del escarlata y verde, como pretende la totalidad de los autores que han tratado el asunto. Sus observaciones son justas sin duda, pero han sido realizadas *sobre espectros impuros* en los que, efectivamente, la luminosidad del amarillo que aparece es alta, debido a que dicho amarillo es un complejo de tres clases de radiaciones: las propias de la región amarilla, las de parte de la escarlata y parte de la verde. Esta es, ciertamente, la causa de la alta luminosidad observada puesto que, en un espectro puro, la estrecha banda amarilla difícilmente puede apreciarse que sobrepase en luminosidad a los colores escarlata y verde.

La misma hipótesis encuentro, más concretada que la de Young, en una nota de John Aitken referente al daltonismo (1), aun cuando mezclada con demasiados errores, y sería digresivo analizarla.

No dañan a la hipótesis apuntada por Young, que aquí reconstruyo, las dificultades que pueda suscitar el otro aspecto que él le asocia. Aquélla sería válida lo mismo, si admitimos tres clases de elementos sensoriales especializados para percibir cada uno de los colores simples, o si, como lo interpreta Ramón y Cajal, cada uno de los conos retinianos es susceptible de producir, según sea el estímulo, las varias reacciones.

10. *El color turquesa.* — En un espectro prácticamente puro, de refracción o difracción, la energía cromática de las radiaciones simples correspondientes a la zona confinante entre verde y ultramar es particularmente débil, de modo que el tono verde-azulado que presenta es poco brillante y aparece, menos que el amarillo, sin toda la energía que, relativamente a los demás colores de un mismo espectro, puede presentar. Pero tenemos que hacer al espectro notablemente impuro, para que por el franco cruzamiento de los rayos verdes y ultramarinos se produzca ese color intermedio que yo llamo *turquesa;* un color muy brillante, por ser compuesto de tres clases de radiaciones, aunque no tanto como el amarillo compuesto, porque uno de los dos importantes componentes del turquesa: el ultramar, es relativamente

(1) *Colour-Blindness,* in *Nature,* octubre 30, 1879, página 627.

obscuro, especialmente en el espectro prismático donde, por su progresiva dispersión, aparecen los rayos ultramar muy *diluídos* en la obscuridad del campo. Es el turquesa, por lo tanto, un color que sólo con lejana semejanza puede observarse en un espectro puro. De hecho, como hemos visto, el franco color turquesa se produce por la mezcla de los rayos verde y ultramar.

Una prueba analítica de que las sensaciones causadas por los rayos de las regiones amarilla y turquesa son las mismas causadas por las sumas escarlata + verde y verde + ultramar, la tenemos considerando los diagramas de la lámina IV y figura E. Evidencia la composición de las ecuaciones contiguas 14-15 y 21-22, que si Maxwell hubiese registrado observaciones intermedias conteniendo luz de los puntos Y de su espectro, esos rayos habrían completado la ecuación con *blue,* sin intervención ninguna de *scarlet* ni *green;* y lo mismo es evidente que una observación conteniendo suficiente luz de T habría completado las ecuaciones intermedias de 9-10 y 26-27 sin intervención de los términos *green* ni *blue.* Cada uno de los puntos Y, T provee, pues, un par de las excitaciones que se muestran indispensables para la síntesis de la luz blanca.

11. *El color blanco.* — He dicho que, prescindiendo del caso especial de la visión «crepuscular», se admite comúnmente que hay cuatro clases de causas para la producción de la sensación de blanco: *a)* la mezcla de todos los rayos del espectro; *b)* la mezcla de los tres colores primarios; *c)* la mezcla de un primario y el secundario que lo complementa, y *d)* la mezcla de dos complementarios cualesquiera.

Yo encuentro, como consecuencia de mis experimentos explicados, que todas esas causas se reducen a una sola: la mezcla, en cantidades equivalentes, de las tres radiaciones primarias.

En efecto, si el espectro, puro o impuro, está formado solamente por rayos capaces de producir cada una de las sensaciones elementales (o dos simultáneamente cada radiación de las secciones confinantes) claro es que mezclar las acciones de los rayos de todo el espectro se reduce a mezclar las acciones productoras de las tres sensaciones simples exclusivamente.

La mezcla de los tres colores primarios del espectro, es obvio que consiste en mezclar las tres sensaciones primarias o elementales.

La mezcla de un color primario y el secundario o doble que le es opuesto, también es claro que se reduce a la mezcla de la sensación primaria por un lado, y las dos restantes sensaciones primarias ex-

citadas por el color doble, sea éste causado por radiaciones dobles o simples.

La mezcla de dos complementarios cualesquiera se explica del mismo modo, pues siempre se encontrará que las radiaciones, y su cantidad, aportada a la mezcla por ambos complementarios, consisten exclusivamente en rayos excitadores de las tres sensaciones primarias o elementales.

Luego, pues, creo poder afirmar que *sólo hay una clase de blanco :* el formado en cantidades equivalentes por radiaciones capaces de excitar las tres sensaciones primarias.

Esta peculiaridad es la que hace que los cuerpos llamados blancos nos aparezcan como los más luminosos que podemos observar en la naturaleza, dentro de una iluminación determinada, puesto que reflejan las tres clases de radiaciones conjuntamente.

Así también, los colores que llamamos amarillo, turquesa y púrpura (en su mayor vivacidad) son, entre los puros, los más luminosos, porque consisten en gran cantidad de dos clases de radiaciones. Y esto explica lo que a diversos autores ha llamado la atención : que no conozcamos ningún cuerpo típicamente amarillo que no refleje con mucha abundancia los rayos rojos y verdes, y que ningún cuerpo «azul» deje de reflejar abundantemente los verdes y ultramarinos. Bouasse (1), por ejemplo, dice : « C'est un pure hasard si les [matières] bleus usuels n'eteignent pas le vert ». Y Rosenstiehl, en su obra citada, también considera « casualidad » que los cuerpos amarillos reflejen con abundancia los rayos rojos y verdes. Pero éstas no son « casualidades » sino hechos necesarios. Si vemos esos cuerpos azules, es precisamente *porque* reflejan verde y ultramar; y si los vemos amarillos, es *porque* reflejan rojo y verde. El que los cuerpos amarillos y azules reflejen además rayos simples de dichos colores tiene poca importancia. Si reflejaran esos solos, veríamos tales cuerpos muy obscuros; y, recíprocamente, el aspecto de la Naturaleza no cambiaría sensiblemente a nuestros ojos si la luz solar quedara privada de los rayos simples amarillos y azules (turquesa atenuado) que contiene.

Lo que llamamos gris, es un blanco atenuado o poco enérgico, como es sabido; y en cuanto al negro, es prácticamente un gris excesivamente débil, pues no hay pigmento que, iluminado, deje de enviar algunas radiaciones al aparato visual. El negro absoluto, la «sensación» que se percibe en un lugar absolutamente privado de luz, es, a mi

(1) *Vision et reproduction des couleurs*, página 248.

parecer, una apreciación visual subjetiva que tenemos en ausencia de todo estimulante objetivo. Es, diremos, una «sensación negativa», parangonable a las de silencio, vacío o insipidez. Percibimos que no hay efectiva sensación visual. Considerar, según Hering y otros autores, al negro como una propia sensación, me parece tan convencional como considerar sensación tactil la de *tocar* el vacío.

12. *Los grupos cromáticos.* — En la serie espectral completada con el cruzamiento escarlata-ultramar, representada en el círculo cromático (fig. C), encontramos que entre cada dos colores simples hay toda una serie o gama de colores dobles formados por aquéllos en dosis progresivamente variadas. Toda la serie que va del escarlata al verde, por ejemplo, forma un grupo de colores de los cuales es tipo el amarillo, y que hacia el escarlata se caracterizan como anaranjados, O, y hacia el verde como de color limón, L. A esa serie, o grupo de colores dobles, la llamo el grupo del amarillo o bien el *grupo xántico.* Semejantemente existen el *grupo ciánico* (esmeralda, E; turquesa, T; y azul, B) y el grupo purpúreo (violeta, V; púrpura, P; y carmesí, C), conteniendo cada uno indefinido número de gradaciones.

13. *Los colores extremos del espectro.* — Es tradicional, desde Newton (dejando aparte su confusión de nomenclatura al principio apuntada), considerar y designar el color del extremo más refrangible del espectro como *violeta.*

En efecto, presenta el extremo del ultramar, cuando gradualmente va terminando en la obscuridad, un color marcadamente violáceo, si bien no es la enérgica y verdadera sensación de violeta doble formado por la superposición de rayos escarlata y ultramar en el espectro inverso o de cualquier otro modo mezclados.

Para explicarnos la presencia de ese violeta simple, me parece que debemos recurrir a la misma hipótesis de doble resonancia aplicada anteriormente. No cuesta dificultad admitir, me parece, que los rayos de esa región espectral, por su frecuencia próxima a la de los netamente ultramar, excitan, aunque ya imperfectamente, la sensación elemental de ultramar; y al mismo tiempo, por estar su frecuencia en aproximada relación de octava con la de los rayos escarlata, excitan también en algún grado, por resonancia de octava, esta otra sensación. De modo pues que ese color violeta, originado por radiaciones simples, sería otro caso de doble sintonía. Lo cierto es que se puede tener excelente color violeta sin rayos de la sección violeta.

Es dudoso que veamos un rastro purpúreo en el extremo rojo del espectro, como algunos observadores creen haber visto. Yo no podría afirmar haber observado ahí otra cosa que una dilucion del escarlata en la obscuridad, y no creo necesaria otra explicación sino la de que nuestra vista deja progresivamente de ser sensible a radiaciones cuya frecuencia es menor que la de los rayos que nos dan la sensación de escarlata. Pero una leve resonancia de octava, recíproca de la violeta, podría ser que se produzca.

14. *Consideraeiones teóricas finales.* — Deduzco de mis experimentos y observaciones que la teoría de Young es substancialmente verdadera para explicar la naturaleza del fenómeno cromático, aun cuando creo necesario añadirle los complementos y modificaciones explicados en el curso de esta memoria.

La teoría de Hering resulta fundamentalmente contradicha por mis experimentos, como también lo ha sido por los diferentes de Abney (1), Burch (2) y Grijns (3).

Principalmente arguyo contra la teoría de Hering (como también lo ha hecho Ladd Franklin en su obra citada, pág. 47), que su teoría requiere que la mezcla de rayos rojos y verdes o la suma de sus acciones en cualquier forma, produjera la sensación de blanco; y eso no es cierto, puesto que produce la de amarillo.

Con intención de evitar esta dificultad, que es fatal para la teoría, se ha recurrido a escoger como rojo primario (llamándolo «rojo de Hering») un color que realmente es un carmesí vecino al púrpura, y como verde primario a un verde azulado próximo al turquesa. Pero estos colores no pueden, en ningún caso, ser primarios, puesto que las mismas sensaciones pueden obtenerse por mezclas de rayos escarlata y ultramar en el primer caso, y de verde y ultramar en el segundo. Cualquier espécimen, de esos dos «primarios» de Hering, es descomponible en sus dos (o tres) elementos.

El «rojo de Hering» ni siquiera está en el espectro, pues sólo en un espectro inverso (mezcla de dos espectros) puede hallárselo.

Del otro par fundamental comprendido en la teoría de Hering, el

(1) *Modified Apparatus for Measurement of Colour*, in *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, volumen 205 A, 1906.

(2) *Loc. cit.*

(3) *L'influence de la lumière colorée sur les images consecutives negatives*, in *Archives Neerlandaises de Physiologie*, tomo VII, página 354.

azul (ultramar) es realmente una sensación simple; pero el amarillo, su complementario, está demostrado que es una sensación que puede ser provocada por agentes que, individualmente, provocan otras sensaciones (rayos escarlata y verdes), mientras que ni la de escarlata, ni de verde, ni de ultramar, pueden ser provocadas por ningún otro agente que el suyo específico, ni por mezcla de otros agentes productores de otras sensaciones. Por lo tanto, ni la *sensación* de amarillo ni el *color* amarillo son fundamentales.

Otras bases de la teoría de Hering son igualmente insostenibles, y por añadidura fútiles. Se funda, para sostener que el rojo, verde, amarillo, azul, blanco y negro son sensaciones simples, en que «ninguna de las sensaciones conocidas por esos nombres contiene, cuando pura, ninguna semejanza de otra sensación cromática... Debido a eso, ellas han recibido especiales nombres, no tomados de prestado a ningunos objetos naturales coloreados... Nadie puede pretender que la menor traza de ningún otro color puede ser distinguida en una pura sensación blanca» (1).

Yo entiendo que es el hábito de la mezcla de pigmentos (verdaderas substracciones de radiaciones o «mezclas substractivas») lo que hace vulgarmente considerar inverisímil la obtención de amarillo por adición de rojo y verde, o de turquesa por adición de verde y ultramar. En cambio, si nos atenemos al común parecer originado en esa común experiencia, el verde parece corrientemente evocar, como sus componentes, al amarillo y azul; no obstante lo cual, el mismo Hering considera simple a su verde.

Que una combinación de cuerpos simples no evoque por ningún carácter a nuestros sentidos e impresiones los caracteres de sus componentes, es caso frecuentísimo en la química, y no puede hacerse argumento de ello. Nótese además que, prácticamente, no hay experiencia común sobre mezcla o suma de radiaciones coloreadas, las que apenas ocasionalmente se experimentan en laboratorios; y la experiencia pictórica común, que ha modelado nuestra mentalidad al respecto, se basa exclusivamente en las mezclas de pigmentos, de las que sólo vemos las radiaciones residuales. Pero ya es dado observar, con no poca frecuencia, por las calles de las ciudades, que en algunos de los tubos de gases electrizados usados para la propaganda nocturna comercial, condicionados para producir luz verde, a menudo se alteran, y alguna porción del mismo tubo, formando, digamos, una

(1) Resumen de Pole, W., en *Nature*, octubre 23, 1879.

misma letra, se cambia en rojo; e indefectiblemente nos aparece la transición amarilla que, sin gran esfuerzo de imaginación (si es que hace falta el argumento) podemos considerar como natural. Bastaría la acumulación de experiencias vulgares como esa, para cambiar la mentalidad común al respecto.

Observando el espectro directo, es tan fácil a la imaginación discernir la impresión de amarillo como intermedia entre las de escarlata y verde, como es fácil atribuir la de verde a intermedia de las de amarillo y azul. Son impresiones que poca relación tienen con la naturaleza íntima de los fenómenos. ¿No nos da, acaso, el sol la impresión de que gira alrededor de la tierra?

Si, además, esos seis colores de Hering son pretendidos simples porque el uso les ha dado nombres peculiares, también el uso se los ha dado al escarlata, carmesí y pardo, por ejemplo, que son en varios idiomas exclusivamente nombres de colores, y no por eso habría pretendido Hering que ello les diera patente de colores simples.

Es, por lo tanto, errónea la clasificación cromática de Ostwald (1), lo mismo que cualquier otra que se base en la teoría de Hering.

En cuanto a la tesis de Ladd Franklin, que pretende conciliar las teorías de Young y de Hering, la considero también errónea, pero haré motivo de un trabajo especial el análisis de la misma.

CONCLUSIONES (2)

1ª El espectro prácticamente puro de la luz blanca, de intensidad usual, está formado por tres bandas coloreadas, sensiblemente homogéneas en gran parte de su extensión en cuanto a la cualidad de las sensaciones que normalmente producen, y que pueden ser designadas: *escarlata* (S), *verde* (G) y *ultramar* (U). Las sensaciones correspondientes a dichas bandas son las sensaciones cromáticas simples, fundamentales o primarias, aun cuando puedan no ser las primitivas en la evolución del órgano visual.

Las sensaciones de *amarillo* (Y), *turquesa* (T) y *púrpura* (P), son compuestas, dobles, secundarias o binarias, y resultan, en su carácter más típico, luminoso e intenso, del hecho de mezclarse por cruzamien-

(1) OSTWALD, W., *Farbkunde*, Leipzig, 1923.

(2) Conclusiones presentadas con exposición verbal a la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, el 26 de diciembre de 1929.

to en el espectro (sea directo o inverso) los rayos correspondientes a los colores simples.

2ª Los espectros de la luz blanca, usualmente estudiados por los investigadores de la cromática, no han sido suficientemente puros; y esta circunstancia afecta al valor de los resultados que hayan sido obtenidos bajo el supuesto de ser satisfactoriamente puros los espectros estudiados.

3ª No es exacto que a cada grado de refrangibilidad o longitud de onda corresponda un color propio y distinto del de sus vecinos.

4ª La sensación de púrpura resulta, por su origen compuesto, de la misma clase o categoría que las de amarillo y turquesa.

5ª Debido a la naturaleza doble y aditiva de los colores secundarios en el espectro, éstos son, en igualdad de condiciones, más luminosos que los primarios. También así, los cuerpos que nos presentan esos colores con gran intensidad son los más luminosos entre los saturados; esto es, los que, en lo posible, no contienen agentes de sensación neutra o blanca.

6ª En un espectro prácticamente puro, se observan dos bandas confinantes : una amarillenta (entre las bandas primarias escarlata y verde), y otra azulada (entre la verde y la ultramar), las cuales son muy angostas y poco luminosas, particularmente la azulada. La influencia cromática de los rayos correspondientes a estas bandas, es cantidad despreciable; y puede asegurarse que el aspecto cromático de la Naturaleza no variaría apreciablemente a nuestros ojos, si la luz blanca no contuviera dichas bandas.

7ª La alta luminosidad, generalmente atribuída por los tratadistas a la sección amarilla, no se observa en los espectros puros sino solamente en los impuros. Esta alta luminosidad resulta de la adición de las vecinas radiaciones rojas y verdes a las propias amarillentas.

8ª Sólo hay una especie de sensación blanca normal : la resultante de la acción simultánea y equivalente de las radiaciones capaces de excitar las tres sensaciones fundamentales.

9ª Los colores llamados anaranjado, azul, violeta, y otros contiguos a los primarios y a los típicos secundarios, son meras transiciones que forman grupo con el secundario típico que les es próximo.

10ª Las atenuadas sensaciones de amarillo y azul, que en condiciones normales observamos en las regiones confinantes de un espectro puro, y la violácea que observamos en el extremo más refrangible de los puros e impuros, pueden hipotéticamente explicarse considerándolas como algún modo de «sintonía» o «resonancia», dado que,

en el primer caso, la frecuencia que se computa a la vibración de sus rayos es próxima, y en el segundo, está próximamente en relación de octava.

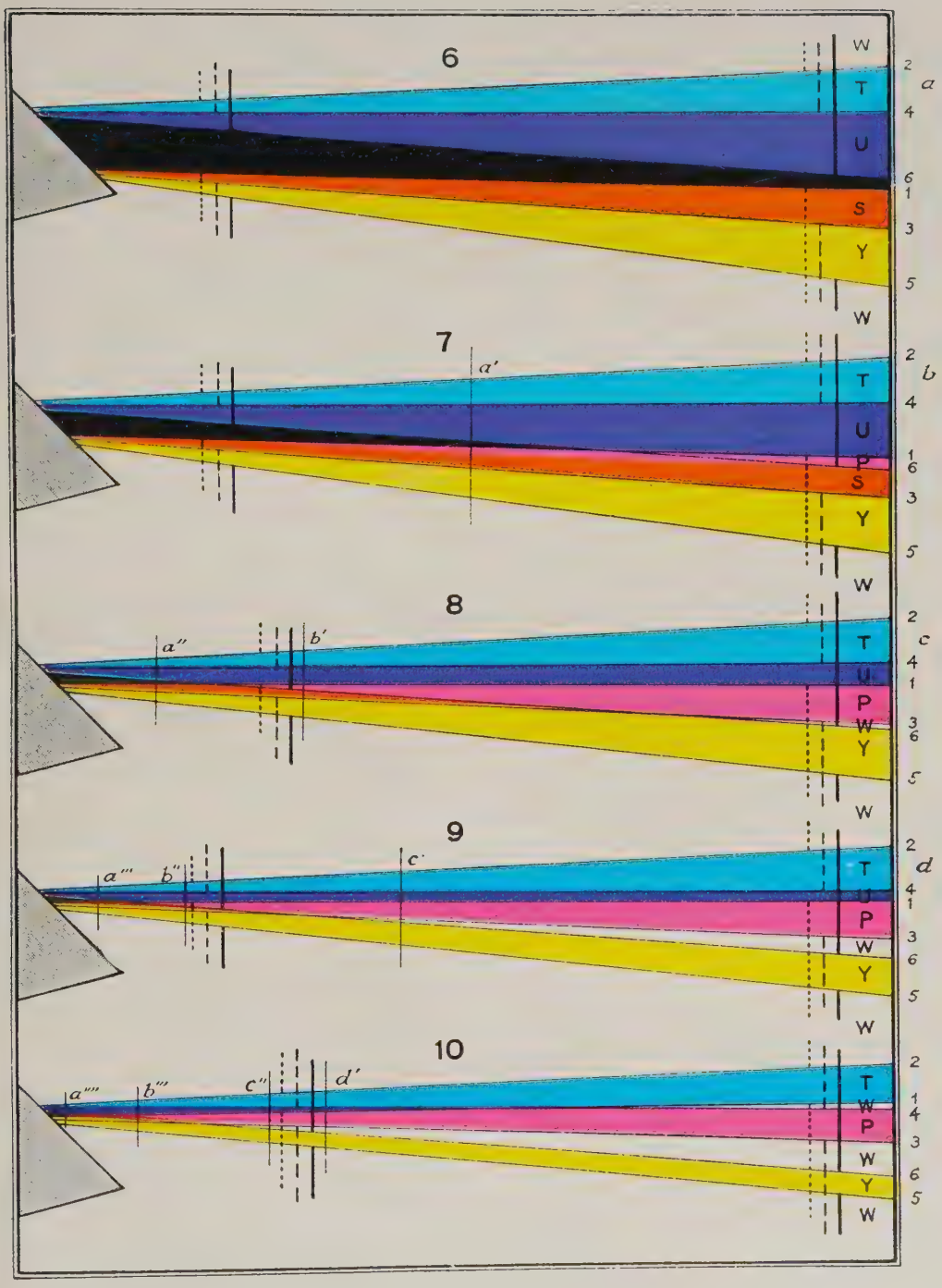
11ª Confirmando en líneas generales la teoría de Young, encuentro inducción lógica de mis experimentos la interpretación de que (en visión fotópica normal) nuestra vista no es susceptible de percibir otras sensaciones cromáticas elementales que las de *escarlata, verde* y *ultramar*. Todas las demás son resultantes de combinaciones de aquéllas.

12ª Los resultados de esta investigación contradicen fundamentalmente la teoría de Hering.

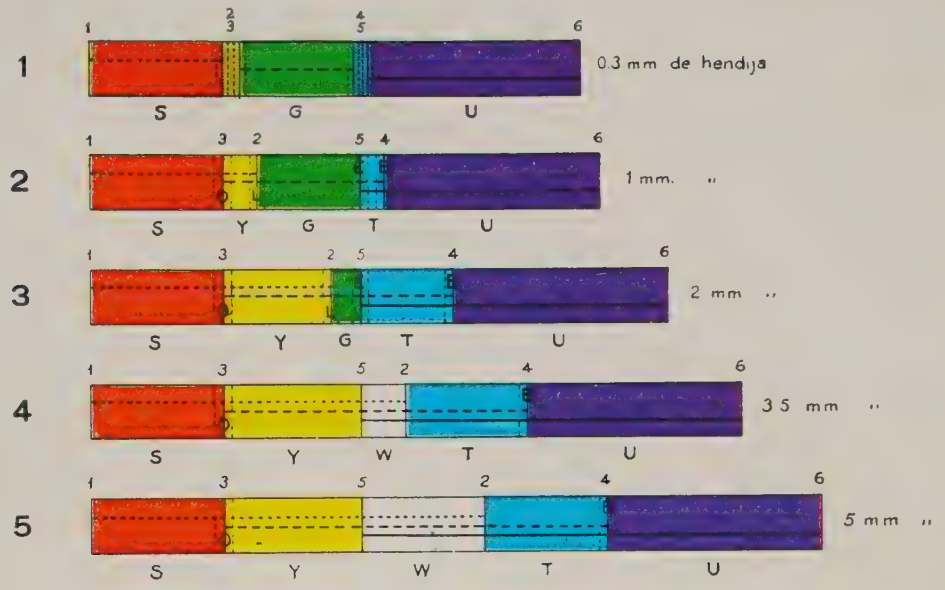
13ª Corresponde con la realidad de los fenómenos cromáticos la disposición en círculo de los colores *puros,* colocando los tres simples en los vértices de un triángulo equilátero inscrito, y los tres dobles típicos en ángulos intermedios, y consecuentemente los colores de transición.

ADVERTENCIA. — Téngase presente que, aun cuando el autor se ha permitido dar traducidas al castellano las citas de textos ingleses, serán puestas en su idioma original en una inmediata edición inglesa de este mismo trabajo.

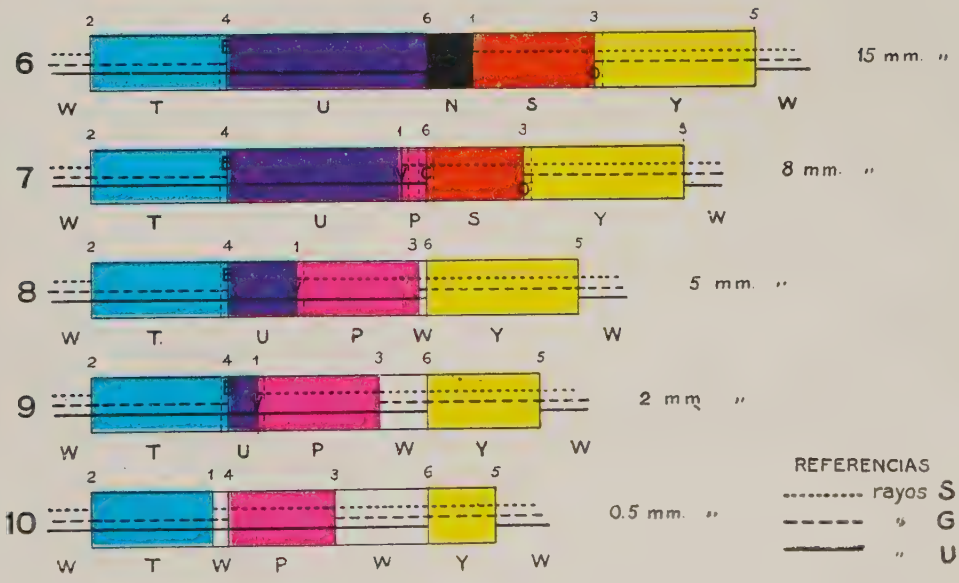
Espectros directos



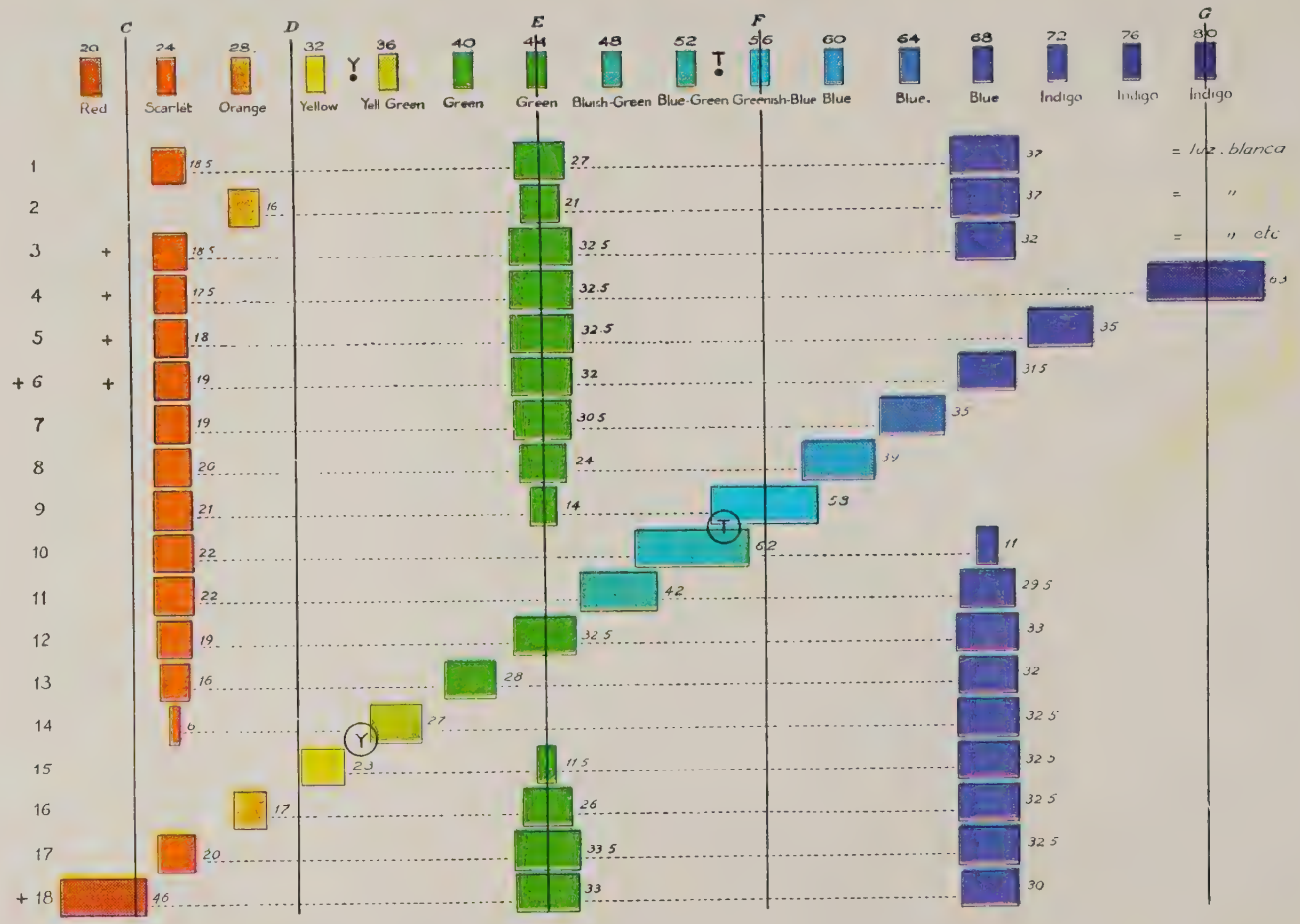
Espectros inversos



Espectros directos



Espectros inversos



Ecuaciones de tres luces espectrales y luz blanca

Diagrama trazado según cifras de Maxwell, cuadro III. (Explicaciones iguales a las de la fig. E del texto)

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE PRODUCTO DE SERIES SUMABLES

CON EL MÉTODO EXPONENCIAL

Por el doctor J. C. VIGNAUX

RÉSUMÉ

Quelques théorèmes sur le produit de séries sommables par le méthode exponentielle. — L'auteur introduit la notion nouvelle de série oscilante (B) et donne deux théorèmes fundamentaux. Il démontre ensuite plusieurs théorèmes sur le produit de séries, sommables par le méthode de Borel, analogues à ceux de Hardy sur le produit de séries convergentes; pour cela il emploie un lemme de Borel et les théorèmes de Madhava sur le produit d'intégrales entre des limites infinis.

1. *Introducción.* — Los clásicos teoremas sobre producto de series convergentes debidos a Cauchy, Mertens y Abel, han sido extendidos y generalizados a las series sumables con el método de sumación exponencial, por M. E. Borel (1), G. Hardy (2) y Sannia (3).

En otro lugar hemos demostrado y a la vez propuesto una inmediata generalización del teorema de Hardy, partiendo del lema de Borel, demostrado por Sannia con hipótesis menos restringidas (4).

(1) E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, París, 1928.

(2) G. H. Hardy, *Researches in the theory of divergent series*, etc., en *The Quarterly Journal of Pure and Ap. Mathematics*, N. 35, 22-66.

La demostración dada por Hardy de su teorema se encuentra reproducida en la tesis del doctor Durañona y Vedia (La Plata), en donde el lector puede estudiarla.

(3) A. Sannia, *Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie*, en *Atti della R. Acc. dei Lincei*, (5), 26, (1917); *Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione delle serie*, en *Atti dei Lincei*, (5), 26, 1917.

(4) J. C. Vignaux, *Revista Matemática*, número 30, Buenos Aires, 1927.

En la presente Nota, después de introducir la noción nueva de *serie oscilante* (B) y de dar dos teoremas fundamentales, se extienden los teoremas de Hardy sobre producto de series convergentes y oscilantes a las series divergentes sumables con el proceso de Borel.

2. *Definiciones.* — Dada la serie divergente

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots,$$

si la serie de potencia

$$u(x) = \sum_0 u_n \frac{x^n}{n!},$$

es una *trascendente entera,* o si ella define una función *analítica regular,* sobre todo el semieje real positivo, diremos con M. Borel que $u(x)$ es la *función asociada* de la serie dada (1).

Considerando la integral (de Borel)

$$\int_0^\infty e^{-x} u(x)\, dx$$

puede suceder que ella sea convergente con el valor u; es decir

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} u(x)\, dx = u,$$

que sea divergente, esto es

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} u(x)\, dx = \pm\infty,$$

o que sea oscilante, es decir el

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} u(x)\, dx$$

no existe.

En el primer caso diremos que la serie dada es *convergente en el sentido de Borel* o *convergente* (B) con suma igual a u; en el segundo, que ella es *divergente* (B), y en el tercero, que la serie propuesta es *oscilante* (B).

(1) Véase : E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes,* capítulo III y sus varias memorias publicadas sobre el particular.

En todo lo que sigue supondremos, para mayor generalidad, que $u(x)$ sea función analítica regular para $x \geq 0$ y real.

En el caso de una serie oscilante (B) el *límite superior* y el *límite inferior*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} u(x)\, dx = U_1$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} u(x)\, dx = U_2$$

llamaremos los *límites de oscilación* (B) de la serie dada (1).

Si la integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \mid u(x) \mid dx$$

converge, diré que la serie (1) es *absolutamente convergente* (B) o *convergente* | B |.

Toda serie convergente | B | *es también convergente* (B).

La serie (1) será *totalmente convergente* (B) o convergente (B_t) si las integrales

$$\int_0^\infty e^{-x} u^{(m)}(x)\, dx \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergen (2).

Admitidas estas definiciones, pasemos a demostrar, ante todo, los dos teoremas siguientes.

3. *Teorema I. — Si la serie*

$$\sum_0 u_n \tag{1}$$

es oscilante (B) *con límites de oscilación* (B) *igual a* U_1 *y* U_2, *la serie*

$$\sum_0 k u_n \qquad (k \neq 0) \tag{2}$$

(1) Estas definiciones fueron propuestas por vez primera en mi tesis doctoral y permiten, sin duda, poner mejor en evidencia la analogía de la teoría de las series sumables de Borel, con el logaritmo de las series convergentes.

(2) La noción de *sumabilidad total* (B) ha sido introducida por el profesor Sannia *(Atti della R. Acc. dei Lincei,* Roma, 1917) en la siguiente forma equivalente : *la serie* (1) se dice *totalmente sumable* (B) *si las series* $\sum_m^\infty u_n$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ *son sumables* (B). El doctor Durañona y Vedia utiliza esta definición y el razonamiento de Sannia para demostrar el teorema de Hardy y el de Borel. *(Sobre producto de series sumables Borel,* en *Contribución al estudio de las Ciencias Físicas y Matemáticas,* nº 86, 1928.)

es también oscilante (B), *con límite de oscilación* (B) *igual a* kU_1 y kU_2. En efecto; se tiene

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty k u_n \frac{x^n}{n!} \right) dx = k \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty u_n \frac{x^n}{n!} \right) dx$$

y

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty k u_n \frac{x^n}{n!} \right) dx = k \underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty u_n \frac{x^n}{n!} \right) dx,$$

donde

$$\varphi(x) = \sum k u_n \frac{x^n}{n!}$$

es la función asociada de la serie (2) la cual es analítica regular ($x \geq 0$).

De aquí resulta, según las hipótesis

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \varphi(x)\, dx = kU_1$$

y

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \varphi(x)\, dx = kU_2$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

Teorema II. — Si la serie

$$\sum_0 u_n \tag{1}$$

es convergente (B) *con suma* U *y la serie*

$$\sum_0 v_n \tag{2}$$

es oscilante (B) *con límites de oscilación* (B), *igual a* V_1 *y* V_2, *la serie*

$$\sum_0 (u_n + v_n), \tag{3}$$

es oscilante (B) *con límites de oscilación* (B) *igual a* $U + V_1$, $U + V_2$.

En efecto; se tiene

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left[\sum_0^\infty (u_n + v_n) \frac{x^n}{n!} \right] dx =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty u_n \frac{x^n}{n!} \right) dx + \overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left(\sum_0^\infty v_n \frac{x^n}{n!} \right) dx,$$

donde

$$\varphi(x) = \sum_{0}^{\infty} (u_n + v_n) \frac{x^n}{n!}$$

es la función asociada de la serie (3), la cual es analítica regular $(x \geq 0)$.

Luego resulta

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t e^{-x} \varphi(x)\, dx = U + V_1.$$

Del mismo modo se tiene

$$\underline{\lim_{t \to \infty}} \int_0^t e^{-x} \varphi(x)\, dx = U + V_2,$$

lo cual demuestra el teorema.

4. *Lema de Borel. — Si* $u(x)$ *y* $v(x)$ *son las funciones asociadas respectivamente de las series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n,$$

la función asociada $H(x)$ *de la serie*

$$o + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

donde

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_n + \ldots + u_n v_0$$

está dada por la integral [1]

$$H(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2}.$$

De modo que si designamos con $w(x)$ la función asociada de la serie producto

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

se tiene

$$\int_0^x w(x) = \int_{-x}^{+x} u\left(\frac{x+y}{2}\right) v\left(\frac{x-y}{2}\right) \frac{dy}{2},$$

y efectuando en esta el cambio de variable

$$y = 2t - x$$

la anterior resulta

$$\int_0^x w(t)\, dt = \int_0^x u(t)\, v(x-t)\, dt. \qquad (A)$$

[1] E. Borel, *Loc. cit.*

M. Borel demuestra su lema efectuando el producto de las dos series $u(x)$ y $v(x)$ cuando ellas son trascendentes enteras, o bien por derivación sucesiva de la expresión (A), cuando ellas son funciones analíticas regulares, en un cierto ángulo de vértice en O ($x = 0$) y que contiene en su interior el eje real positivo (1).

Utilizando el lema de Borel y algunos teoremas de Madhava sobre producto de integrales entre límites infinitos, demostraremos varios teoremas nuevos sobre producto de series convergentes (B).

5. *Lema I. — Si las series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n$$

son convergentes (B) *con suma* u *y* v, *respectivamente, y las funciones asociadas* $u(x)$ *y* $v(x)$ *satisfacen a la condición*

$$(\alpha)\ \lim_{x\to\infty} x \,.\, u(x) = 0, \qquad (\beta)\ \lim_{x\to\infty} x \,.\, v(x) = 0,$$

la serie

$$o + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

donde

$$w_n = u_n v_0 + u_n v_1 + \ldots + u_0 v_n$$

es también convergente (B) *con suma* $w = uv$ (2).

En efecto, según un teorema de Madhava, si las integrales

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_0^\infty g(x)\,dx$$

(1) Es en la forma (A) que el lema de M. Borel, ha sido utilizado por el doctor Durañona y Vedia para hacer una exposición sistemática de los teoremas de Borel, Hardy y Saunia antes citados, utilizando los diversos teoremas sobre producto de integrales demostrados por el matemático Madhava *(Sobre productos de series sumables Borel,* en *Contribución al estudio de las ciencias,* nº 86, IV, 1928, La Plata. Ver también : *Sobre producto de una integral sumable* C$_\delta$ *por una integral absolutamente convergente,* en *Boletín del Seminario Matemático Argentino,* vol. I, pág. 22 (en nota), enero de 1929).

(2) Este lema fundamental ha sido demostrado por M. Borel con la hipótesis que las integrales de Borel correspondientes a (1) y (2) sean *absolutamente convergentes,* por G. Hardy en el supuesto que solamente *una* de estas integrales sea *absolutamente convergente,* y por G. Saunia con las hipótesis que las funciones asociadas $u(x)$ y $v(x)$ sean *trascendentes enteras* y las integrales de Borel *simplemente convergentes.*

Sin la hipótesis formulada por Saunia, este lema es *falso.* El profesor Saunia ha demostrado y utilizado este lema en varias oportunidades. Véase : *Nuevo metodo di sommazione delle serie,* en *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* tomo XLII, página 303, 1917, y las memorias antes citadas.

son convergentes y

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} xg(x) = 0,$$

resulta que

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt \quad (^1).$$

Poniendo

$$f(x) = e^{-x}u(x), \qquad g(x) = e^{-x}v(x)$$

se tiene, según (α) y (β) :

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-x}u(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} xe^{-x}v(x) = 0,$$

luego por el teorema enunciado, teniendo presente que

$$\int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt = e^{-x}\int_0^x u(t)\,v(x-t)\,dt$$

da

$$\int_0^\infty e^{-x}u(x)\,dx \int_0^\infty e^{-x}v(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\left[\int_0^x u(t)\,v(x-t)\,dt\right]dx.$$

Si designamos ahora con H (x) la función asociada de la serie

$$o + w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

resulta, según el lema de Borel

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^x u(t)\,v(x-t)\,dt,$$

por tanto, la igualdad anterior se puede escribir

$$uv = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{H}(x)\,dx. \qquad (4)$$

La cual nos dice que la serie (3) es convergente (B) con suma $w = uv$.

6. *Teorema III. — Si las dos series*

$$(1) \quad \sum_0^\infty u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0^\infty v_n \quad (2)$$

(1) MADHAVA, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 1919-1920.

son convergentes (B) *con suma* u *y* v *respectivamente, y las funciones asociadas* $u(x)$, $u'(x)$ *y* $v(x)$ *satisfacen a la condición*

$$(\alpha)\ \lim_{x\to\infty} e^{-x}u(x) = 0 \qquad (\beta)\ \lim_{x\to\infty} xu'(x) = 0$$

$$(\gamma)\ \lim_{x\to\infty} xv(x) = 0$$

la serie producto

$$\sum_0^\infty w_n \qquad (w_n = u_n v_0 + \ldots + u_0 v_n) \quad (3)$$

es convergente (B) *con suma* $w = uv$.

En efecto; una integración por partes, da

$$\int_0^a e^{-x}u(x)\,dx \Big| = -e^{-x}u(x)\Big|_0^a + \int_0^a e^{-x}u'(x)\,dx,$$

y tomando límite para $a \to \infty$ de ambos miembros resulta, teniendo en cuenta la condición (α) :

$$\int_0^\infty e^{-x}u(x)\,dx = u_0 + \int_0^\infty e^{-x}u'(x)\,dx,$$

por tanto, la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \qquad (4)$$

es *convergente* (B) con suma $u' = u - u_0$.

Efectuando el producto de las dos series (2) y (4) y teniendo presente las condiciones (β) y (γ), resulta por él (lema I) que la serie

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_1 v_2) + \ldots \qquad (5)$$

es convergente (B) con suma $u'v = (u - u_0)\,v$.

Además, como la serie

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + \ldots \qquad (6)$$

es también convergente (B) con suma igual a $u_0 v$, resulta, sumando las series (5) y (6), la serie

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots$$

es decir

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

la cual también es convergente (B) con suma igual a

$$w = (u - u_0)\,v + u_0 v = uv.$$

7. *Teorema IV. — Si las dos series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n$$

son totalmente convergentes (B) *con sumas u y v respectivamente, y las funciones asociadas u (x) y v (x) cumplen a la condición*

$$(\varkappa)\ \lim_{x\to\infty} xu^{(\lambda)}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} xv(x) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

la serie producto

$$\sum_0 w_n$$

es totalmente convergente (B) *con suma* $w = uv$.

De la convergencia (B_l) de la serie (1) resulta que

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{4}$$

es también convergente (B) con suma $u - u_0$. Efectuando el producto de las series (2) y (4) y teniendo presente, según ($\varkappa$), que

$$\lim_{x\to\infty} xu'(x) = 0$$

resulta por él (lema I) que la serie

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_1 v_2) + \ldots \tag{5}$$

es convergente (B) con suma $(u - u_0)\, v$.

Sumando la serie (5) con la

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + \ldots \tag{6}$$

convergente (B) con suma $u_0 v$, resulta la serie

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots$$

también convergente (B), con suma igual a

$$w = (u - u_0)\, v + u_0 v = uv.$$

Para probar la *convergencia total* (B) de la serie producto (3) nos falta probar ahora que las series

$$\sum_{\nu}^{\infty} w_n \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

son también convergentes (B).

Por hipótesis, la serie

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \tag{7}$$

es *convergente* (B) y

$$\lim_{x\to\infty} xu''(x) = 0,$$

luego podemos aplicar el lema I a las series (2) y (7), con lo cual se obtiene la serie

$$o + u_2v_0 + (u_2v_1 + u_2v_0) + \ldots \tag{8}$$

convergente (B).

También son convergentes (B) las series

$$u_1v_0 + u_1v_1 + u_1v_2 + \ldots \tag{9}$$

y

$$u_0v_1 + u_0v_2 + u_0v_3 + \ldots, \tag{10}$$

por tanto, sumando las tres series (8), (9) y (10), resulta la serie

$$(u_0v_1 + u_1v_0) + (u_0v_2 + u_1v_1 + u_2v_0) + \ldots,$$

es decir

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots$$

la cual es también convergente (B).

Del mismo modo se probaría la convergencia (B) de las series

$$\sum_{\nu}^{\infty} w_n \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

8. *Lema II.* — *Si las series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n$$

son convergentes (B) *con sumas u y v respectivamente, y las funciones asociadas u (x) y v (x) satisfacen a la condición*

$$(\alpha)\ |xu(x)| < \mathrm{M} \qquad \text{y} \qquad (\beta)\ |xv(x)| < \mathrm{N} \qquad (x \geq 0)$$

donde M *y* N *son dos números positivos, la serie*

$$o + w_0 + w_1 + \ldots \qquad (w_n = u_nv_0 + \ldots + u_0v_n) \tag{3}$$

es convergente (B) *con suma* $w = uv$. En efecto; Madhava ha demostrado que si las integrales

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

son convergentes, y

$$|xf(x)| < A, \qquad |xg(x)| < B,$$

donde A y B son dos números positivos, se tiene

$$\int_0^\infty f(x)\,dx \int_0^\infty g(x)\,dx = \int_0^\infty dx \int_0^x f(x)\,g(x-t)\,dt \ (^1).$$

Poniendo

$$f(x) = e^{-x}u(x), \qquad g(x) = e^{-x}v(x)$$

resulta, según (α) y (β), que

$$|xe^{-x}u(x)| < M \qquad \text{y} \qquad |xe^{-x}v(x)| < N,$$

luego, por el teorema enunciado, resulta

$$\int_0^\infty e^{-x}u(x)\,dx \int_0^\infty e^{-x}v(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\left[\int_0^x u(t)\,v(x-t)\,dt\right]dx,$$

la cual, por el lema de Borel, se puede escribir

$$uv = \int_0^\infty e^{-x}\,H(x)\,dx,$$

igualdad que nos afirma la convergencia (B) de la serie (3) con la suma $w = uv$.

9. *Teorema V. — Si las dos series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n$$

son convergentes (B) *con suma u y v respectivamente, y las funciones asociadas u (x), u' (x) y v (x) satisfacen a la condición*

$$(\alpha)\ \lim_{x\to\infty} e^{-x}u(x) = 0, \qquad (\beta)\ |xu'(x)| < M, \qquad (\gamma)\ |xv(x)| < N,$$

la serie producto

$$\sum_0 w_n \tag{3}$$

es convergente (B) *con suma* $w = uv$.

En efecto; según (α) la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots \tag{4}$$

es convergente (B) con suma $u' = u - u_0$.

(1) *Loc. cit.*

Aplicando el lema II a las series (2) y (4), lo cual es legítimo, puesto que sus funciones asociadas $v(x)$ y $u'(x)$ satisfacen a las condiciones (β) y (γ), resulta que la serie

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_1 v_2) + \ldots \tag{5}$$

es convergente (B) con suma $u'v = (u - u_0)\, v$.

Sumando la serie (5) con la serie

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + \ldots \tag{6}$$

convergente (B) con suma $u_0 v$, resulta la serie

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0) + \ldots$$

convergente (B) con suma igual a

$$w = (u - u_0)\, v + u_0 v = uv.$$

Lo cual prueba el teorema.

10. *Teorema VI. — Si las dos series*

$$\sum_0 u_n \qquad \text{y} \qquad \sum_0 v_n$$

son convergentes (B_t) *con suma u y v, respectivamente, y las funciones asociadas* $u(x)$ y $v(x)$ *cumplen a la condición*

$$(\alpha)\ |x u^{(\lambda)}(x)| < M \qquad (\beta)\ |x v(x)| < N \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

la serie producto

$$\sum_0 w_n$$

es convergente (B_t) *con suma* $w = uv$.

En efecto; la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

es también convergente (B) con suma $u - u_0$; por tanto, aplicando el lema II a las series (2) y (4), lo cual es posible por la condición (α) y (β), resulta que

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_1 v_2) + \ldots \tag{5}$$

es convergente (B) con suma $(u - u_0)\, v$.

Sumando la (5) con la serie

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + \ldots \tag{6}$$

convergente (B) con suma $u_0 v$, resulta la serie convergente (B)

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

con suma

$$w + (u - u_0)\, v + u_0 v = uv.$$

Nos falta probar ahora que también son convergentes (B) las series

$$\sum_{\nu}^{\infty} w_n \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

De la convergencia total (B) de la (1) resulta que

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots \tag{7}$$

es convergente (B) y como $| xu''(x) | < M$, podemos aplicar el lema II a las series (2) y (7), con lo cual se obtiene la serie

$$o + u_2 v_0 + (u_2 v_1 + u_3 v_0) + \ldots$$

convergente (B).

Además, como también son convergentes (B) las series

$$u_1 v_0 + u_1 v_1 + u_1 v_2 + \ldots \tag{8}$$

y

$$u_0 v_1 + u_0 v_1 + u_0 v_3 + \ldots \tag{9}$$

sumando (7), (8) y (9), resulta la serie

$$(u_0 v_1 + u_1 v_0) + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0) + \ldots$$

convergente (B).

Del mismo modo se probaría la convergencia (B) de las series

$$\sum_{\nu}^{\infty} w_n \qquad (\nu = 2, 3, 4, \ldots)$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

11. *Lema III. — Si la serie* $\sum_0 u_n$ *es convergente* | B | *con suma u, y la serie* $\sum_0 v_n$ *es oscilante* (B) *con límite de oscilación* (B) *finitos* V_1 *y* V_2 *y la función asociada* $v(x)$ *satisface a*

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = 0,$$

la serie

$$o + w_0 + w_1 + \ldots$$

donde

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0$$

es oscilante (B) *con límite de oscilación* (B) *igual a* uV_1 *y* uV_2. Por hipótesis

$$\int_0^\infty e^{-x} \mid u(x) \mid dx = u$$

y

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} v(x)\, dx = V_1$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} v(x)\, dx = V_2.$$

Por otra parte, Madhava ha demostrado que si $\int_0^\infty f(x)\ dx$ es convergente con el valor s, y $\int_0^\infty g(x)\ dx$ es *oscilante* entre los límites finitos V_1 y V_2 y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, la integral

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty f(t)\, g(x-t)\, dt$$

es oscilante y sus límites de oscilación valen sV_1 y sV_2 (1).

Haciendo

$$f(x) = e^{-x}u(x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = e^{-x}v(x)$$

resulta

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} v(x) = 0,$$

luego, según el teorema anterior, la integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \left[\int_0^x u(t)\, v(x-t)\, dt \right] dx$$

es oscilante (B) entre los límites uV_1 y uV_2; es decir

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left[\int_0^x w(t)\, dt \right] dx = uV_1$$

y

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t e^{-x} \left[\int_0^x w(t)\, dt \right] dx = uV_2$$

donde

$$\int_0^x w(t)\, dt,$$

es la función asociada de la serie (3). De aquí resulta que la serie (3) es *oscilante* (B), con límites de oscilación (B) igual a uV_1 y uV_2.

(1) *Loc. cit.*

12. *Teorema V. — Si la serie*

$$\sum_0 u_n \tag{1}$$

es convergente | B | *con suma u, y*

$$\sum_0 v_n \tag{2}$$

es oscilante (B) *con los límites de oscilación* V_1, V_2, *y*

$$(\alpha) \quad \lim_{x\to\infty} v(x) = 0,$$

la serie producto

$$\sum_0 w_n \qquad (w_n = u_0 v_n + \ldots + u_n v_0) \tag{3}$$

es oscilante (B) *y sus límites de oscilación son* uV_1 *y* uV_2. En efecto, de la convergencia | B | de la (1) y según la condición (α), resulta que la serie

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

es *convergente* | B | con suma $u - u_0$.

Efectuando el producto de las series (2) y (4), y según él (lema III) la serie

$$o + u_1 v_0 + (u_1 v_1 + u_1 v_2) + \ldots \tag{5}$$

es oscilante (B) con los límites de oscilación (B) igual a

$$(u - u_0) V_1 \qquad \text{y} \qquad (u - u_0) V_2.$$

Además, la serie

$$u_0 v_0 + u_0 v_1 + u_0 v_2 + \ldots$$

es oscilante (B) (teorema I) entre los límites $u_0 V_1$ y $u_0 V_2$; luego, sumando las series (5) y (6), resulta la serie

$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots$$

que es oscilante (B) (teorema II) entre los límites

$$(u - u_0) V_1 + u_0 V_1 = u V_1$$

y

$$(u - u_0) V_2 + u_0 V_2 = u V_3$$

con lo cual queda demostrado el teorema.

LA FILOSOFÍA EN LA ESCUELA

Por J. SESCOSSE

RÉSUMÉ

La philosophie à l'École. — L'auteur a cherché à établir comment, dans les systèmes actuels d'éducation, la mémoire est arrivée à occuper la place qui devrait être réservée à l'inteligence ; la confusion qui s'ensuit entre savoir et érudition, et le peu d'éfficacité de ces systèmes pour la formation intellectuelle et morale des futurs citoyens.

Lejos, muy lejos, en el pasado, debe encontrarse la fecha del momento en que el hombre, librándose de la animalidad, se sintió conciente de sí mismo. ¿Cómo se produjo ese pálido y débil rayo de luz? ¿De dónde vendría esa centella primera? ¿En qué momento del desarrollo, libre de los tropismos que rigen sus primeros movimientos, produjo el ser humano ese primer acto dirigido hacia un fin determinado, esa primera « volición » para hablar el lenguaje dogmático y difícil de la escuela? ¿Quién asegurará que esa conciencia se manifiesta en el mismo momento y con la misma intensidad y extensión en toda la humanidad, que es idéntica en el hombre y en la mujer?

¡Cuántos interrogantes descuidados, que deberían encontrarse en la base más profunda de todo sistema de educación!

Cuando la conciencia al despertarse produjo el primer esfuerzo de concentración de la atención, nació la inteligencia, y delante de ella se abrió el sector infinito del progreso. El progreso fué por mucho tiempo solamente material. Tenía demasiado quehacer en su lucha directa contra la naturaleza, para que el hombre pudiera dedicarse a las especulaciones intelectuales que producen el progreso moral. Del hacha de silex al ultramicroscopio, a la radiotelefonía, a la teoría de relatividad, la historia es tan larga como apasionante. Esa historia no

es la que se enseña en las escuelas, con la de «las luchas sostenidas por los pueblos para lograr más justicia y una vida intelectual más elevada». (Payot, *Le travail intellectuel et la volonté)*. Esa tarea será para cuando los historiadores futuros entiendan su misión de educadores.

Por ahora se trata de establecer de un modo racional: cómo se transmitieron los primeros conocimientos que la experiencia había consagrado, la tradición que crearon, y cómo nació la fe, casi supersticiosa, en el poder de la palabra para comunicar el pensamiento, y de la memoria para conservarlo.

Si es difícil hallar y fijar el origen del hombre, es relativamente fácil seguir los pasos de su desarrollo intelectual. La vida de los indígenas en las regiones poco exploradas aún, da una idea de lo que pudieron ser las primeras enseñanzas, las primeras lecciones confiadas a la memoria. Cuenta un viajero, después de una larga estada en Australia, que tuvo oportunidad de asistir varias veces a verdaderas clases de historia. De noche, los jóvenes guerreros se reunen en la choza común, la de las deliberaciones, y allí el más anciano de la tribu, el conservador de los anales, el Tito Livio local, refiere a su auditorio lo que, cuando joven recogió, en idénticas condiciones, del que le precedió en el cargo, acerca de las gestas realizadas por los antepasados. Si se considera que el salvaje es inconcientemente embustero, es fácil imaginarse las alteraciones que sufre la verdad histórica al pasar de una generación a la otra. Una voz significa el pasado «magadideo». Según cuánto dura el calderón intercalado entre «ma» y «gadideo», debe medirse e interpretarse la distancia en el tiempo entre el hecho referido y la hora presente. La voz se eleva de tono, el sonido prolongado le da un valor propio; ya no es el pasado, puede significar cualquier momento de ese pasado; contiene un concepto metafísico, impreciso, confuso, misterioso. La pobreza del vocabulario primitivo exige que las palabras tomen un sentido extensivo, y la multiplicidad de conceptos atribuídos a cada una da origen a la superstición del simbolismo oral.

En su libro *Les influences ancestrales,* F. Le Dantec consagra un capítulo, *La magie des mots* a esa superstición que crea fórmulas, encantaciones e invocaciones, comparables con los amuletos, «grigri», generalmente sentencias del Koran encerradas en estuchitos de cuero, más o menos numerosos según la situación económica del creyente, que los negros senegalenses compran a sus sacerdotes para llevarlos, enhebrados, en collares.

Para los aldeanos de la baja Bretaña, esas fórmulas tienen el poder de alejar el perro rabioso cruzado en el camino; las invocaciones a determinado santo sanan las enfermedades que ese santo sólo puede curar. Los « grigri » en África protegen contra la flecha del enemigo, el zarpazo del león, o las fauces del cocodrilo.

Las inflexiones de la voz, los sonidos emitidos, con o sin sentido de idea constituyen la eficacia de las fórmulas y encantaciones. El único medio de transmitir el poder secreto es por consiguiente, el sentido auditivo. La memoria es la facultad que retiene, a ella se confía por medio de la palabra, lo que es o se cree es el saber.

La humanidad ha crecido, cuenta largos años de vida civilizada. Ha inventado el lenguaje escrito para dar duración al pensamiento, la imprenta para su divulgacion. Ha acumulado un acervo magnífico de adquisiciones, que multiplican aún las horas que corren. Para el buscador, que ha adquirido la experiencia, el hecho se hace ley, la la ley se sintetiza en la fórmula o la regla. La regla y la fórmula se imprimen en el libro; y el libro pasa por contener la ciencia. La contendría quizá si el prestigio de la letra impresa no se interpusiera entre la lectura de la fórmula escrita y la interpretación del pensamiento que contiene. La mayoría de los lectores de hoy proceden como procedían los que, en el momento del renacimiento, podían leer. Todo les era bueno. No se trataba de entender sino de retener. Se confundió erudición con saber, y la confusión no se ha desvanecido. Montaigne es el modelo de aquellos lectores; también en las frondosidades de sus *Essais,* lo que más interesa es lo que da de sí mismo.

El maestro que enseña no es él que realizó el acto. Repite lo que ha leído u oído de otro maestro. Es un eco; y el eco es tanto más débil cuanto más se aleja de la fuente sonora. Si el eco es mecánico y fiel, la memoria no lo es, a menudo deforma el hecho recordado; pero perdura la fe en la enseñanza mnemónica.

En los conocimientos que se consideran indispensables para la formación intelectual y moral del futuro ciudadano, los hay, toda la parte científica, para cuya adquisición la memoria sola es impotente. El alumno debe « ver », debe « sentir » la realidad de las bases de los mismos, como sintieron las necesidades de esos conocimientos los que crearon la ciencia. Pero por costumbre adquirida, la memoria se interpone siempre entre la explicación y la inteligencia. Hasta el momento de sus primeros esfuerzos de lógica racional, el niño aprende todo con la memoria. Su experiencia es poca, su atención incipiente e insegura. Para simplificarle el estudio se han escrito las de-

finiciones y reglas; estas se confían a la facultad retentiva, cuyo poder se considera ilimitado. ¡Que el niño repita, entenderá más tarde! Si es cierto que la memoria es indispensable para retener y saber, también es cierto que es una facultad pasiva e insensible. Conserva con igual indiferencia la oración contra el perro rabioso, como el número del edificio y el nombre de la calle en que funciona el instituto Pasteur. No tienen ambos recuerdos igual importancia para la conservación del individuo.

La tradición de la fe en la memoria como facultad adquisitiva es consecuencia de los prejuicios arraigados en el ambiente. El padre que, al presentar a su hijo en la escuela, dice ufano: «¡tiene una memoria extraordinaria!», ignora que ciertos niños retardados, incapaces de unir dos pensamientos, retienen y repiten, sin equivocarse unas series de voces sin ilación ni sentido. Antes de retener hay que entender. En los seres equilibrados la memoria es y debe ser la sirviente de la inteligencia. Por sí misma no puede realizar el trabajo de síntesis entre las materias, que es la esencia del saber. Hace cuatro siglos escribía Descartes: «Debemos persuadirnos de que todas las ciencias están tan estrechamente vinculadas entre ellas, que es mucho más fácil aprenderlas todas juntas que aprender una sola aislándola de las demás». Pero la memoria retiene cada materia por separado, en una cámara impermeable, como los retardados retienen las series de voces que repiten inconcientemente. El espíritu queda disperso, dividido. Se realiza la observación que consigna el psicólogo y sociólogo francés M. Paulhan: «los elementos psíquicos quedan aislados, el espíritu se atiborra con ideas, conocimientos, creencias que no le sirven para nada y que no sabe utilizar».

De ahí la queja general contra los sistemas actuales de educación, contra su poca eficacia para la formación del criterio y del carácter. «Nos faltan *hombres*» exclamaba Jouffroy a mediados del siglo XIX. Hoy se dice: «faltan hombres e ideas». Es que el hombre no es: ¡se hace! Esa obra constructiva es larga y de cuidado; más aún: para el hombre superior dura tanto como la vida. Cuando requiere toda la atención de la sociedad es quizá la más descuidada, la que menos preocupa. Los métodos no han evolucionado en el sentido de anteponer la inteligencia a la memoria, a pesar de la prédica de tantos apóstoles, entre los cuales el más abnegado, el más incansable, M. A. Binet, escribe este pensamiento tan digno de provocar la meditación de todos los dirigentes: «Si la educación fuera lo que debe ser, habría muchos más hombres superiores».

BIBLIOGRAFÍA

Por C. W. y C. C. D.

---

a) en idioma castellano

Dique San Roque. Informe de la comisión integrada por los ingenieros Rodolfo E. Ballester, Adolfo Suárez y Carlos A. Volpi. Un folleto de 125 páginas (22 × 31) a dos columnas, con 27 planos y 36 tablas intercaladas. Publicación oficial del ministerio de Obras públicas de la provincia de Córdoba, editada en los Talleres gráficos de la guía « Expreso », de Buenos Aires, 1930.

Una vez más el gobierno somete al estudio de los técnicos el problema que plantea el dique que, durante 40 años, ha provocado el desarrollo económico de Córdoba y sus alrededores, no obstante la sentencia de muerte inminente, dictada en los primeros años de su vida, por quienes descubrían en el muro desastrosas condiciones elásticas que la experiencia no ha confirmado.

El nuevo proyecto, explicado en 22 capítulos distribuídos en una parte *general* y otra *técnica,* se desenvuelve a base de hipótesis originales de sus autores. Sin entrar a analizarlas en detalle, reducen a 315 hectómetros cúbicos el caudal integral del río Primero, que una comisión, calificada de *indiscutible* en 1915, fijaba en 700 hectómetros cúbicos. Como primer resultado inmediato, la comisión rebaja la altura del muro de 55 a 45 metros.

Aquellas curiosas hipótesis se entrelazan para llegar a una notable conclusión : el derrame de la hoya hidrográfica es tanto mayor cuanto menos llueve en ella; y aun cuando fluye de sólo cuatro años de anotaciones, naturalmente mal interpretadas, los resultados se extienden a 56 años. Conocido así, en forma tan original, el régimen del río, resulta ser para la comisión « la base fundamental de sus recomendaciones ».

Las grandes crecidas observadas en 1903 y 1923, esto es durante la explotación del dique existente, lograron acumular algo más de 200 hectómetros cúbicos en el pantano, alcanzando la mayor de ellas una altura de re-

tención de 35,30 metros. No obstante reconocer que la última « es una de las grandes seculares del río », se proyecta el abandono absoluto del dique para hacer uno nuevo. Debe retener 350 hectómetros cúbicos, caudal obtenido por suma del total ordinario anual de 200 hectómetros cúbicos y del anormal de crecidas de 150. En aquellos años de 1903 y 1923, de crecidas máximas, se habían reunido también aquéllos, no pasando, en conjunto, de 200 hectómetros cúbicos.

La comisión reconoce que los grandes caudales de agua o picos no pueden reservarse en el pantano por largos períodos de años, porque la activa evaporación anula los efectos de la acumulación costosa, que así no resulta ni útil ni práctica. El grado de frecuencia de una reserva dada no se estudia ni se conoce ; el aporte real del derrame es una incógnita que no se consigue despejar en los 40 años de explotación de las obras ; las numerosas comisiones que han intervenido se contentan con formular hipótesis pero no se detienen a fijar rumbos precisos.

De los cinco aprovechamientos que enumera la comisión para las aguas embalsadas, descarta el destinado a la alimentación de un canal navegable al Paraná ; propone que se suprima la provisión para las aguas potables de la ciudad, a pesar de reconocer que este consumo y el del regadío son los *primordiales* y que determinan el régimen de la descarga del pantano. Simplificado así el problema que reconoce de « complicación inusitada », en razón de ser contradictorias las exigencias de los distintos usos, el único que se atendería de los primordiales, el regadío, *no se estudia* porque la comisión declara estar « absorbida por el estudio principal del dique ». ¡ Curioso proceso en que no interviene ni interesa, por lo visto, el régimen del aporte del agua de derrame disponible, ni el de la descarga, regido por los usos corrientes del agua !

Para formar idea de los resultados alcanzados con estos nuevos métodos de estudio, basta recordar que las dotaciones máximas de agua entregadas a la red de canales para el servicio, se verifican cuando más llueve en la zona, a razón de 100 a 120 milímetros por mes, dentro de un total medio anual de 703 milímetros y un semestre lluvioso que se lleva el 82,3 por ciento del mismo. Se explica que la confesada falta de estudio del regadío se substituya con una descarga arbitraria de caudal, fijada a título *indicativo,* pero que sirve de único fundamento para establecer conclusiones terminantes ulteriores, y que absorbe el 65 por ciento del total anual destinado para riego en aquel mismo semestre lluvioso. ¡ Evidente contrasentido, disimulado con habilidad pero no en forma menos resaltante !

La producción de fuerza motriz se reconoce *subproducto* de los aprovechamientos primordiales ; y como de éstos, uno se propone suprimir y el otro no se estudia, la comisión, sobre estas bases inconsistentes, proyecta toda la financiación de los recursos necesarios para la ejecución de la mínima parte de obras que contempla. Por otra parte, hace resaltar las ventajas de una usina única, pero proyecta dos. La unificación produce, con el dique

tacual, las mismas ventajas, porque no dependen del muro sino de la descarga, y ésta está supeditada al volumen de agua disponible y no al que sugieren hipótesis absurdas.

La creación de tasas sobre el aprovechamiento *subsidiario* del agua, dejando los restantes primordiales libres de todo gravámen, importa un error económico inconcebible para una zona cualquiera en que el uso del agua de dominio público se hace para crear riquezas y no para encubrir especulaciones. El sistema representa la amoralidad impuesta desde arriba, la más peligrosa de todas sus formas; porque resulta poco saludable semejante enseñanza oficial que proclama el enriquecimiento con el trabajo y los bienes ajenos.

El presupuesto de las obras de 7.100.000 pesos no es completo; sólo comprende el muro y algunas expropiaciones, dejando sin avaluar las inversiones reclamadas: para remover las vías ferroviarias inmediatas; para completar y mejorar las obras necesarias a efectos de asegurar una explotación racional de las aguas en la zona dominada por la red de canales; para regularizar y embellecer doce kilómetros de cauce frente a la ciudad y en ambas márgenes; para retener las aguas de los arroyos de Saldán y la Cañada que también pasan por allí y el dique no regula; para construir y equipar la usina hidroeléctrica única, etc. Son obras que no se han estudiado, impuestas como complementarias del plan propuesto y del que forman parte integrante, cuyo coste real debe conocerse con precisión antes de iniciar cualquier trabajo.

Todas estas circunstancias permiten adelantar que el proyecto propuesto no constituye «la solución científica definitiva e inconmovible» que el gobierno deseaba conseguir, ahogando todo estudio crítico y reduciendo su acción a decretos y acuerdos. Y las hipótesis y métodos usados no pueden considerarse sino como recursos de ocasión, para llenar un mandato imperativo superior, dentro de un plazo insuficiente, apremio oficial revelado al fijar la suma a invertir en las obras en una ley de empréstito, dictada antes de conocerse el informe de la comisión que las estudiaba. Con semejantes propósitos, los empleados administrativos no hacen ni enseñan ciencia, sino recursos para encubrir tramitaciones erróneas y de moralidad discutible.

Puede afirmarse que el proyecto no será el último de la larga serie reunida desde 1890; y que se seguirán acumulando otros más, mientras no haya un gobierno dispuesto a encarar el problema con la seriedad científica que impone una investigación, directa y objetiva, de la naturaleza misma. Su ausencia persistente justifica la necesidad de recurrir a las diversas hipótesis que formulan las comisiones que se precian de estudiar el problema *en definitiva*, pero que otra nueva destruye para ofrecer el propio que sigue la misma suerte, precisamente por falta de contacto con la realidad de los hechos. — *C. W.*

b) EN IDIOMA ITALIANO

LEVI-CIVITA, T., *Pulviscolo cosmico e distribuzione maxwelliana.* Un folleto (21 × 30), 16 páginas. Roma, Scuola Tipografica Pio X.

En esta nota, el eminente matemático italiano extiende las apreciaciones estadísticas de la teoría cinética de los gases a un conjunto caótico de corpúsculos en el que se hallan representadas todas las masas (además de todas las velocidades como en las moléculas de un gas). Semejante conjunto puede razonablemente equipararse a los polvos cósmicos y, particularmente, a los meteoritos. Las fórmulas obtenidas se aplican a los meteoritos que un planeta encuentra en su movimiento orbital. — *C. C. D.*

LEVI-CIVITA, T., *Caratteristiche e Bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein* (dos notas). Un folleto (20 × 28,5) 18 páginas. Giovanni Bardi, Roma, 1930.

En estas dos notas, el autor se propone aplicar la teoría general de las características desarrollada por Volterra y Hadamard (que se refieren a un sistema cualquiera de ecuaciones a derivadas parciales), a las ecuaciones gravitacionales de la teoría de la Relatividad que constituyen un sistema de diez ecuaciones a derivadas parciales de segundo orden con otras tantas funciones incógnitas de cuatro parámetros independientes.

Sabido es que los métodos de Volterra y Hadamard están íntimamente vinculados, ya con el problema de la integración de Cauchy, ya con el comportamiento de las eventuales superficies de discontinuidad o singulares del tipo común — comportamiento que, del punto de vista físico y en relación al fenómeno representado por las ecuaciones mismas, se interpreta como propagación de lo llamado *frente de la onda*. La primera de las dos notas es preparatoria de la segunda. — *C. C. D.*

c) EN IDIOMA FRANCÉS

«Agenda Béranger» para 1931. Un manual de bolsillo simili-cuero (14 × 9), 348 páginas. Precio en Buenos Aires : 18 francos. Librería Béranger, 1930.

Al dar las noticias de esta Agenda relativas a los años 1929 y 1930, hemos apuntado sus características y el interés que puede prestar a los gremios de ingenieros, arquitectos, mecánicos, industriales, empresarios, electricistas aficionados a la T. S. H. y automovilistas.

En la agenda de 1931 se han agregado algunas cuestiones no tratadas en los años anteriores, especialmente en materia legal. — *C. C. D.*

ALBELINO, NICOLAO DE, *Verdadera relacion delo sussedido en los Reynos e prouincias del Peru desde la yda a ellos del Virey Blasco Nuñes Vela hasta el desbarato y muerte de Gonçalo Piçarro* (Sevilla, 1549). Reproducciones facsímile con una introducción de José Toribio Medina. Un tomo (en 8°) 18 × 27, 92 páginas, París. Institut d'Ethnologie, 1930. Precio en Buenos Aires : 45 francos, encuadernación tela.

Se trata de la publicación número XI de los Trabajos y Memorias del Instituto de Etnología de la Universidad de París. El libro reproduce de una manera perfecta, en facsímile, un libro del que sólo se conoce el ejemplar conservado en la Biblioteca Nacional de París y que antes perteneció a la Biblioteca del Rey. El director del Instituto, doctor Pablo Rivet, entusiasta de todo lo que se refiere a la América, al resolver esta publicación facsimilar, incorpora así un documento a la ya larga lista de los referentes a la historia hispanoamericana. En una introducción, don José Toribio Medina hace una interesante exposición relativa al libro de Nicolao de Albenino publicado en Sevilla el 2 de enero de 1549, apenas mencionado por los autores y tan raro que ni el meticuloso Antonio de León Pinelo lo cita en su célebre y erudito *Epitome* impreso en Madrid en 1629. Su continuador Andrés González Barcia, un siglo después, señala su existencia, pero al estado del manuscrito.

La referida introducción de Medina contiene otras numerosas y curiosas informaciones relativas a la historia bibliográfica de la obra y de las particularidades que la caracterizan.

La reproducción facsimilar es sumamente nítida y pone de manifiesto la hermosa impresión del original, hecha con tipos góticos de admirable facilidad de lectura. — *C. C. D.*

BUILDER, A., *Travail du Bèton*. Un tomo, en 8° (14 × 22), 171 páginas con 167 figuras en el texto. Precio en Buenos Aires, por correo 32,50 francos. Librería Béranger, París, 1930.

El propósito del autor de este libro es, simplemente, facilitar a los albañiles y aficionados, las indicaciones necesarias para la ejecución de obras de hormigón, en lo relativo a las materias primas, armaduras y preparación del hormigón, terminado, aglomerados, áreas hormigonadas, muros, tanques, vasos, tubos y accesorios diversos. Suministra tablas con las que es posible, sin ningún cálculo especial, conocer los espesores a dar a los dinteles y vigas de pequeña longitud, etc.

Claro está que con estas informaciones se fomenta la construcción de obras en hormigón, lo que es de positiva conveniencia. — *C. C. D.*

CICLO DE CONFERENCIAS

(1929)

ALGUNAS TENDENCIAS MODERNAS EN LA SIDERURGIA

Y LA IMPLANTACIÓN DE ESTA INDUSTRIA EN LA REPÚBLICA ARGENTINA (1)

POR SVEN WÄSSMAN

RÉSUMÉ

Quelques tendances modernes en sidérurgie. Implantation de cette industrie dans l'Argentine. — L'auteur, après avoir rappelé le procédé, toujours le même, suivi depuis la préhistoire jusqu'au commencement des temps modernes pour obtenir le fer, traite la question de la fonte et des hauts fournaux à chalumeau; ainsi que celle de l'économie de la chaleur, et des fours électriques. Passant ensuite au but principal, il étudie la manière d'obtenir le fer dans l'Argentine : l'usage de minéraux et de sables ferrugineux n'offre pas de perspectives engageantes pour l'exploitation; mais l'auteur pense que le pays pourra, plus tard, avoir une industrie de l'acier basée sur d'autres matières. A ce propos, et après avoir exposé des considérations sur la fabrication actuelle de l'acier, il croit que cette fabrication pourra se faire ici en employant le vieux fer actuellement remis en Europe pour être refondu. Il expose, à ce sujet, tout un plan d'exploitation.

LA SIDERURGIA ANTIGUA

Cuando abarcamos de un golpe de vista toda la historia del hierro, llama poderosamente nuestra atención que, desde los tiempos prehistóricos hasta el principio de la edad moderna, el hierro siempre fué producido por un solo procedimiento. Para que tengamos una perspectiva justa del último desarrollo de la siderurgia, quiero describir brevemente aquel método de la infancia del hierro.

En una forja (fig. 1) se colocaba mineral de hierro y carbón vege-

(1) Conferencia dada en el local de la Sociedad Científica Argentina el 20 de junio de 1929.

tal, se daba fuego al carbón usando un fuelle, y por este medio era muy fácil reducir el mineral y obtener *directamente hierro maleable.* Pero en los hornos antiguos la temperatura no era suficiente para fundir el hierro, sino que se le obtenía en estado pastoso mezclado con escoria.

Son muy interesantes la descripción y las ilustraciones de *Agrícola* al respecto. En una de sus láminas (fig. 2) se observa una forja catalana en actividad. La escoria, producida por la ganga del mineral,

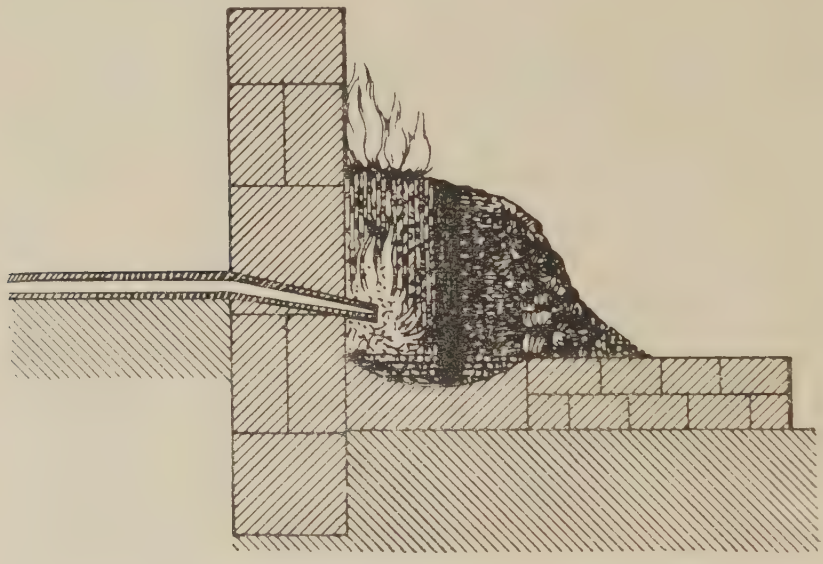


Fig. 1. — Forja antigua de Córcega (según T. de Coudray, 1786)

salía por un orificio practicado en el fondo de la forja, y con la escoria se desperdiciaba también una gran parte del hierro en forma oxidada. El hierro esponjoso, al salir de la forja, era golpeado con grandes mazas de madera para quitarle la escoria y hacerlo compacto.

Lo más fácil, en aquellos tiempos, era producir hierro dulce; en cambio, la fabricación de acero se estimaba un arte más difícil. Sólo con ciertas menas se lograba este propósito, usando la temperatura más alta posible y dejando el hierro por más tiempo en contacto con el carbón candente. Entonces se aleaba el hierro con un poco de carbono, lo necesario para convertirlo en acero.

A principios de la edad moderna se adoptaron los hornos bajos a cuba, llamados « Stücköfen », pero la manera de proceder era siem-

pre la misma. Después de una hornada de ciertas horas, pudo extraerse un grueso pedazo de hierro; y a esta tarea asistieron todos los habitantes de la aldea donde funcionaba el horno (fig. 3).

Aún hoy en día, los negros de Borneo usan hornos semejantes. Hago mención de esto por una razón especial : como las bellas artes de la actualidad suelen buscar su inspiración entre los negros, hasta el

Fig. 2. — Forja catalana (según G. Agrícola 1556)

Fig. 3. — « Stückofen » (según Agrícola)

punto de reproducirse sus danzas en nuestros salones, así también la siderurgia de los últimos tiempos ha intentado poner en práctica otra vez los métodos bárbaros, pero en forma perfeccionada. Sobre el hierro esponjoso moderno trataré más adelante.

EL HIERRO FUNDICIÓN

Ahora debo recordaros otra clase de hierro, llamado *fundición,* que data del siglo XV y marca una nueva era en la historia del hierro. La fundición es hierro *carburado,* que se obtuvo en forma líquida cuando

los hornos se construyeron más altos y la temperatura fué más elevada. Para tener presente la diferencia principal entre la fundición y el acero, conviene estudiar la siguiente tabla :

	Contenido de carbono, %	Punto de fusión	Propiedades
Hierro y acero dulce..	0,02-0,35	1400°-1500°	*Maleable* y soldable; apenas templable.
Acero.....	0,35-1,60	1300°-1400°	*Maleable* y templable; soldable hasta 0,7 % de C.
Fundición.....	2,00-5,00	1050°-1250°	*No maleable.*

Al principio se creía que los hornos estaban hechizados, cuando dieron hierro fundición, el que no era utilizable para nada. Pero muy pronto se logró *afinarlo,* es decir convertirlo en acero o hierro dulce, fundiéndolo en una forja aparte, delante del soplete. En esta forma se oxidaba parte de su carbono, pero el producto resultaba siempre el de las masas semifundidas. Recién con los procesos Bessemer y Martín se consiguió afinar la fundición en grandes cantidades y obtenerse hierro y acero *fundidos* (1).

LOS ALTCS HORNOS A SOPLETE

La nueva era se caracteriza, pues, por la producción *indirecta* del acero : primeramente se funde el mineral en *altos hornos,* de marcha continua, dando hierro fundición, y después se afina dicha fundición en *hornos de acero.*

Los primeros altos hornos (fig. 4) que siempre funcionaban con carbón de leña, no eran muy grandes. En comparación con ellos, los establecimientos modernos, que generalmente usan coque, son gigantescos (fig. 5); y a esta impresión contribuyen las numerosas máquinas y aparatos accesorios que antes eran desconocidos.

Para formarse una idea del enorme desarrollo de la siderurgia, me refiero al siguiente cuadro :

(1) Según práctica internacional, la denominación *acero* se refiere también al hierro de bajo porcentaje de carbono, obtenido en estado líquido.

Métodos	Producción por hora	Consumo de carbón	Rendimiento
Una forja catalana	25 kg	360 %	31 %
Un horno a cuba (Stückofen)	40	250	39
Un alto horno de carbón vegetal con siete forjas de afino	6.000	140	85
Un alto horno de coque con uno o dos hornos Siemens-Martin	25.000	125	95

No hace mucho, los altos hornos más grandes producían 600 toneladas diarias, pero ahora se construyen altos hornos que producen 1000 toneladas diarias.

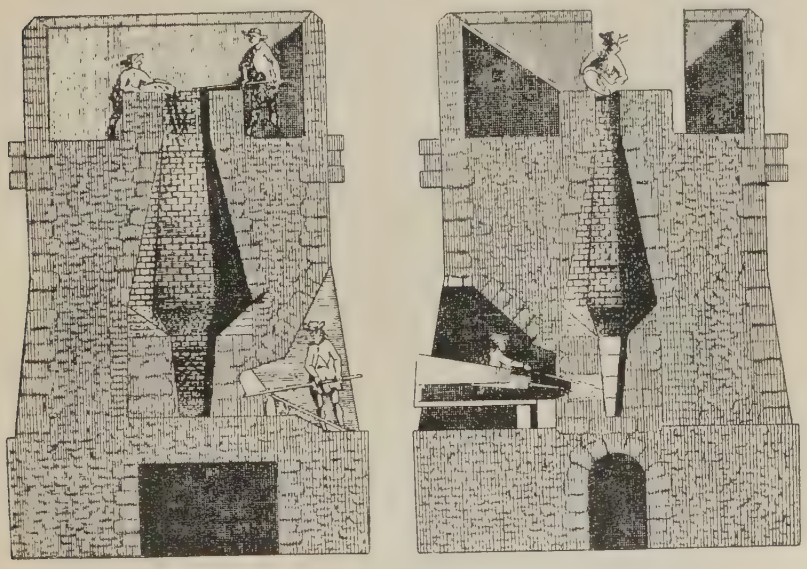


Fig. 4. — Alto horno antiguo (según Courtivron y Bouchu, 1761)

No me voy a ocupar mayormente del desarrollo del alto horno común. El problema de combustibles en la Argentina, donde no se conoce hasta el presente carbón de piedra explotable, impone considerar, con más razón, las *modificaciones* del proceso común tendientes a disminuir su consumo de combustible. A efectos de ilustrar el sentido de esas tentativas, trataré previamente sobre

LA ECONOMÍA DE CALOR DEL ALTO HORNO

El carbón, en los altos hornos a soplete, sirve para dos fines :
1° Producir el calor necesario, y
2° Reducir los óxidos de hierro.

Fig. 5. — Establecimiento moderno norteamericano; a la izquierda el alto horno, a la derecha los calentadores del aire. (B. Stoughton, *The Metallurgy of Iron Steel.*)

Si fuera posible llenar estas tareas en forma ideal, ellas se efectuarían según las siguientes ecuaciones :

$$C + \underset{\text{aire}}{O_2 + 4N_2} = CO_2 + 4N_2 + 97.200 \text{ cal.} \qquad (1)$$

$$2Fe_2O_3 + 3C = 3CO_2 + 4Fe - 104.000 \text{ cal.} \qquad (2)$$

De esta manera, el poder calorífero y reductor del carbono se utilizaría por completo; y el gas, al salir del horno, contendría solamente anhídrido carbónico y nitrógeno, que carecen de valor.

Pero así no se verifican las reacciones, sino que se produce también el óxido de carbono, de gran valor calorífico, el cual se despide junto con los otros gases y no llega a aprovecharse en el horno.

Las leyes termodinámicas prescriben ciertas *relaciones de equilibrio* entre el óxido de carbono y el anhídrido carbónico, según las temperaturas. De acuerdo con estas leyes, la composición de la corriente de gas en los diferentes niveles del alto horno, sería la del diagrama A

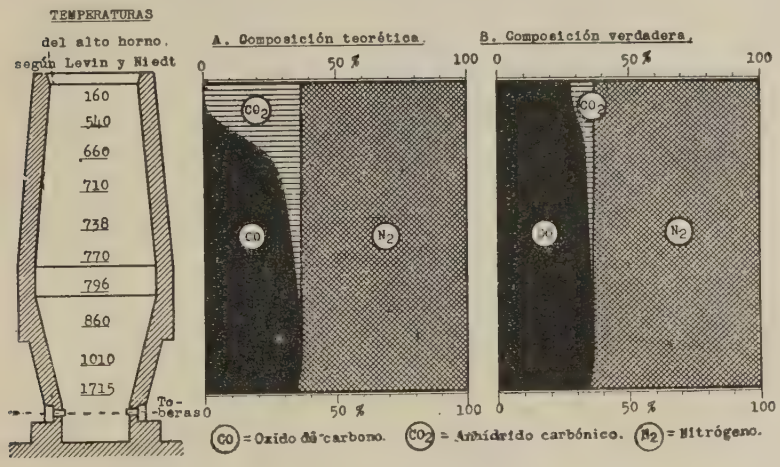


Fig. 6. — Composición volumétrica del gas de un alto horno

(fig. 6). El óxido de carbono que subiera en la carga mezclado con nitrógeno, se transformaría en anhídrido carbónico, cuando encontrara temperaturas más bajas.

Desgraciadamente no ocurre así; por la lentitud de las reacciones, el estado de equilibrio nunca se realiza. La verdadera composición del gas se presenta en el diagrama B de la misma figura. Se ve en éste que el gas saliente contiene de 25 a 30 por ciento de óxido de carbono, por cuyo motivo es necesaria su utilización fuera del horno.

De gran interés es el *balance térmico* de un alto horno, tal como lo demuestra, en forma perspectiva, la figura 7. Allí se ve que *el gas extrae un 48 por ciento de la energía del coque usado.* Cierto es que una parte del gas se emplea para calentar el viento y mover las máquinas soplantes y que el sobrante puede utilizarse, por ejemplo, en

motores a gas para generar electricidad; pero mucho mejor sería si se pudiese aprovechar el coque por completo en el alto horno mismo, produciendo lo demás de la energía necesaria con hulla barata o con fuerza hidráulica.

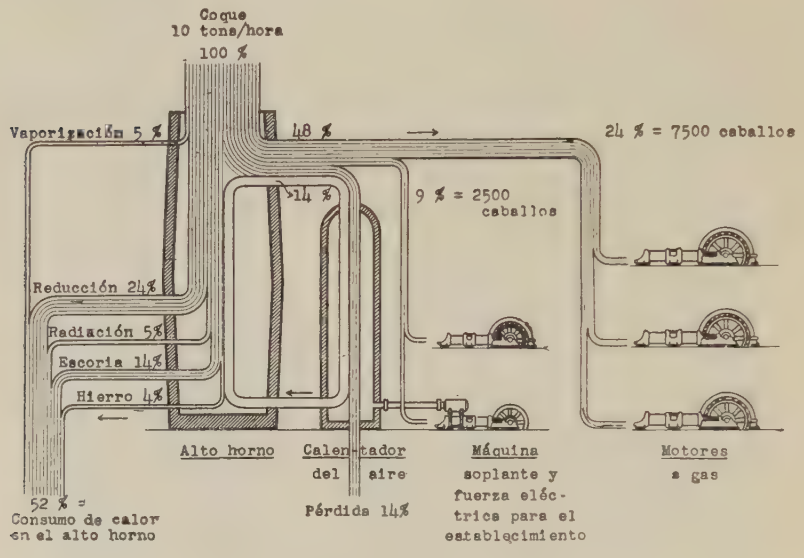


Fig. 7. — Balance térmico de un alto horno

Para hacerse independiente de la mala economía térmica del alto horno a soplete, se ha inventado

EL ALTO HORNO ELÉCTRICO

Debo hacer la salvedad de que éste no ha sido adoptado para economizar con coque sino con *carbón de leña,* que es más caro que el coque, en los casos en que se prefiera este combustible por ser mayor su pureza, o por falta de otro más barato. Además, la energía eléctrica no puede substituir totalmente al carbón, sino sólo al 60 ó 65 por ciento, es decir, a lo que corresponde al calentamiento del horno, porque siempre se necesita carbón para la reducción del mineral.

La figura 8 demuestra el perfil de un alto horno eléctrico de Suecia. Muy característico es el crisol del horno con los 6 electrodos. No se usa, en éste, viento de soplete, por cuya razón se produce muy poco gas, o sea sólo un 15 por ciento de la cantidad de costumbre. A

fin de rebajar su contenido de óxido de carbono, es necesaria una circulación del gas, extrayéndolo por la boca e inyectándolo nuevamente por debajo de la bóveda, cuya conservación al mismo tiempo favorece.

El consumo de energía es de 2500 kilowatt-horas por tonelada de

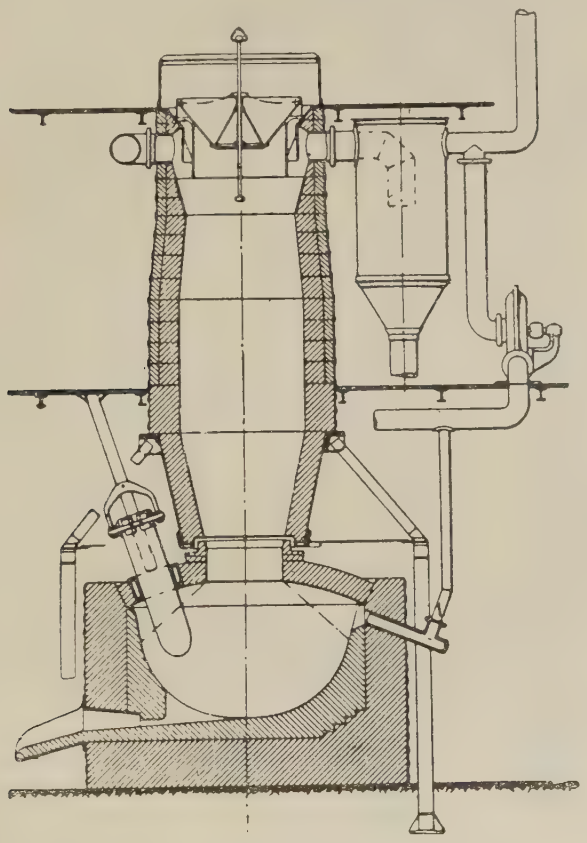


Fig. 8. — Perfil de un alto horno eléctrico

fundición producida, más unos 400 kilogramos de carbón vegetal; por cuyo motivo, un establecimiento de tal clase necesita fuerza eléctrica muy barata : en Suecia se paga sólo de 1/2 a 1/3 de centavo moneda nacional argentina por kilowatt-hora.

En los altos hornos eléctricos, el carbón vegetal da mejor resultado; y con éste se puede obtener fundición de muy buena calidad que se vende a precios más altos que los obtenidos por fundición al coque. A este hecho se debe, en gran parte, la economía del proceso sueco.

Fuera de la península escandinava, se lo ha usado algo en Italia, Canadá, la India, el Japón y el Brasil. También en Chile se ha proyectado la construcción de altos hornos eléctricos.

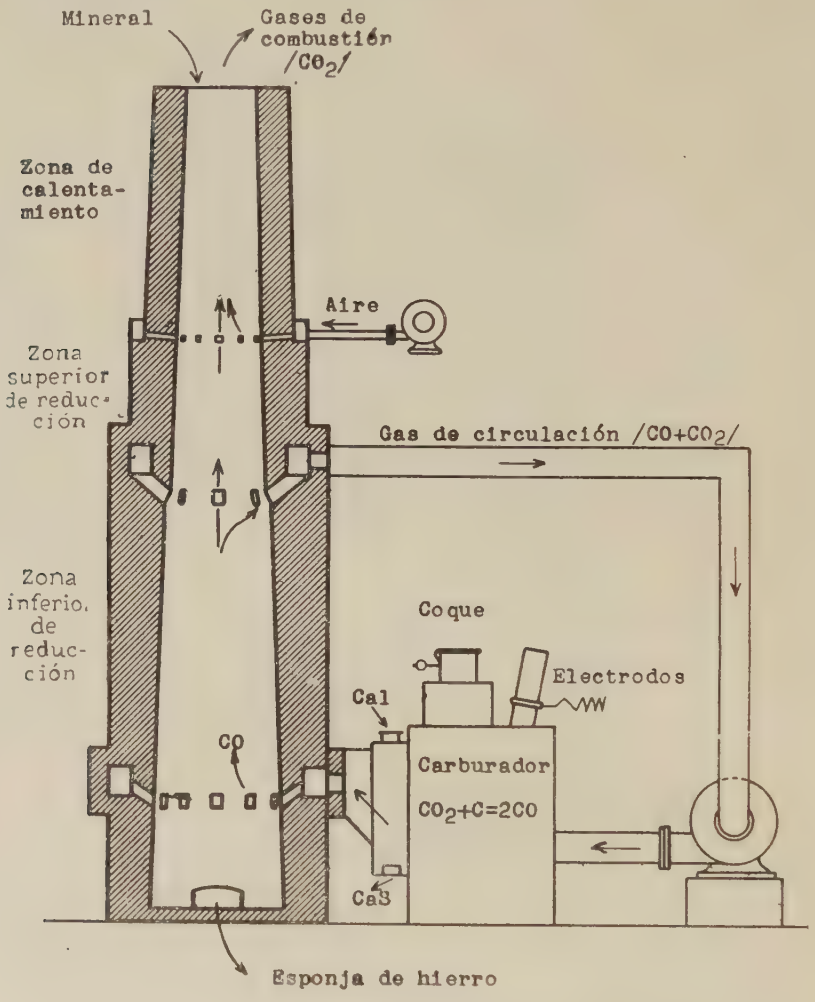


Fig. 9. — Horno para producción de hierro esponjoso, sistema Wiberg

LOS MODERNOS MÉTODOS DIRECTOS

Antes de considerar la posibilidad de producir hierro a base de minerales argentinos, mencionaré los métodos modernos para producir *hierro esponjoso* y fabricar *acero directamente del mineral*, por-

que estos métodos también pueden ser de interés para la Argentina.

El hierro esponjoso se obtiene a temperaturas relativamente bajas, a las que no se funde el mineral ni el hierro; por eso el metal viene mezclado con la ganga y no puede laminarse si no se le somete primero a una fusión, precedida a veces por preparación magnética. Como agente reductor, se usa gas o polvo de carbón; y los hornos se

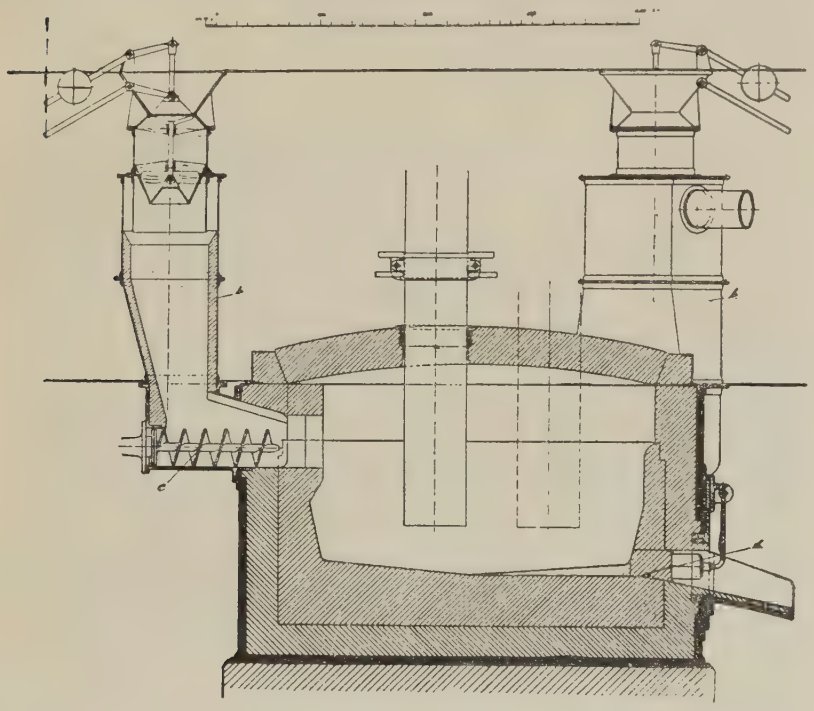


Fig. 10. — El horno Flodin para producción directa de acero (*Jernkontorets Annaler, Diskussions mötet,* 1927, Estocolmo)

construyen con cuba vertical o, más bien, como cilindros horizontales rotativos.

Los métodos citados pueden llevarse a cabo a base de mejores principios teóricos que los realizados en el alto horno. Según uno de ellos (fig. 9) se quema el gas en la parte superior del horno para calentar el mineral, de manera que el gas que sale de la boca está libre de óxido de carbono. Otro principio es el de retirar una parte del gas a la mitad del horno, saturarlo con óxido de carbono en un *carburador eléctrico,* e inyectarlo de nuevo en el fondo del horno, donde actúa como reductor.

La esponja de hierro así producida debe fundirse en un horno de acero; pero según el *método Flodín,* se efectúa tanto la reducción del mineral como la fundición del acero en un solo horno eléctrico (fig. 10).

Se abrigan muchas esperanzas con estos métodos que permitirían economías de combustible, y facilitarían, en ciertos casos, la explotación de menores recursos minerales, para mercados limitados. Se puede, además, producir acero de alta calidad que haría competencia con el acero común.

PRODUCCIÓN DE HIERRO A BASE DE MINERALES ARGENTINOS

Se deduce de lo antedicho que la energía eléctrica desempeña un papel destacado en las tentativas de beneficiar minerales de hierro con poco empleo de combustibles, especialmente cuando falte carbón de

Fig. 11. — Filo de la Cortadera con el campamento y a la izquierda algunos de los trabajos mineros

piedra. La República Argentina, según el inventario hecho por una comisión de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires, dispone de considerables recursos de fuerza hidráulica, cuyo valor para la industria podría ser grande, si éstos llegasen a ser explotados en el futuro.

Sin embargo, es prematuro todavía discutir el empleo de esas riquezas para beneficiar *minerales de hierro* en la República. Es cierto

que se conocen yacimientos de hierro en algunas provincias, pero no son de tal magnitud que tengan importancia comercial, y los mayores de ellos demuestran una baja ley que encarece su tratamiento metalúrgico. Así, por ejemplo, el mineral de hierro del Filo de la Cortadera (figs. 11 y 12), a 26 kilómetros al NNE de Tinogasta, contiene solamente de 25 a 30 por ciento de hierro, como término medio sobre un área de unos 900 metros cuadrados.

Un obstáculo bien conocido, para cualquier explotación de hierro en aquellas comarcas, son los largos y costosos transportes; pues el

Fig. 12. — Los trabajos mineros en Filo de la Cortadera (provincia de Catamarca)

flete para hierro fundición, de Tinogasta a Buenos Aires, por ejemplo, llega a costar hasta la mitad de precio del hierro importado; y limitado a un mercado más cercano a las minas, el hierro no encontraría demanda suficiente.

Otra dificultad para la siderurgia en las zonas del norte y noroeste, es el problema de los combustibles: el coque importado allí no puede tomarse en cuenta; y el carbón de leña es, como en todas partes del mundo, un combustible costoso. Los bosques allí existentes son muy vastos, pero en general poco densos y no se adaptan a una explotación barata como las selvas de pinos y abetos, cuya leña se transporta sobre la nieve y por ríos caudalosos. Si se tratase de otras partes de la República, convendría pensar en plantaciones de euca-

liptus, como se han proyectado en el Brasil (1). Esos árboles crecen tan rápidamente, que se necesitan sólo unas 500 hectáreas plantadas para poder proveer *continuamente* un pequeño alto horno común. En cambio, un bosque catamarqueño, para el mismo propósito, tendría que ser, por lo menos, 100 veces más grande, si se cuidara su conservación; lo que tal vez no es económicamente posible.

En condiciones más favorables, desde muchos puntos de vista, se hallan los depósitos de *arena ferruginosa* en la costa de la provincia de Buenos Aires; pero su ley bajísima no da margen a grandes es-

Fig. 13. — Arena ferruginosa, enriquecida en la playa al norte de Mar del Plata

peranzas. El mineral de los médanos allí existentes, consiste en granos de magnetita contaminada con titano y, además, en otros minerales ferruginosos y titaníferos, sin valor.

Algunas veces, la arena está enriquecida en la playa, formando manchas negras, como se ve en las figuras 13 y 14; pero la cantidad de estos depósitos es muy reducida.

Las investigaciones realizadas por la Dirección General de Minas han dado el siguiente resultado respecto a los mejores yacimientos, es decir, *los médanos continuos entre Miramar y Necochea y a ambos lados del río Claromecó :*

(1) Véase : G. Herlin, *La industria siderúrgica en el Brasil,* Santiago de Chile, 1928.

Cantidad de arena	80.000.000 tns
Longitud total de los médanos citados	150 km
Superficie total de los médanos citados	100 km²
Contenido total de hierro	5 %
Contenido total de bióxido de titano	1 »
Contenido de hierro recuperable por concentración magnética	1-1,5 »
Composición del concentrado :	
Hierro	50-60 »
Bióxido de titano	11-13 »
Rendimiento de la concentración	20-30 »

El producto concentrado se obtiene fácilmente; pero la eliminación y el aprovechamiento del anhídrido titánico es más complicado. Sobre este particular, las investigaciones todavía no se han llevado a término, pues se efectuarán ensayos de laboratorio aplicando los princi-

Fig. 14. — Un corte en la arena ferruginosa del lugar representado en la figura anterior

pios para la producción de hierro esponjoso, combinados con preparación magnética; y si no se pudiera eliminar el titano de esta manera, la esponja sería menos apta para la fabricación de acero, causando considerable merma en la fundición.

Aunque las perspectivas actuales de la siderurgia argentina, en cuanto a la explotación de *minerales,* son muy poco halagüeñas, no dudo sin embargo de que el país tendrá en lo sucesivo una industria

de acero basada en otras materias primas. Hay ciertas tendencias a este respecto en la siderurgia de hoy día que deben interesarnos, y por tal motivo trataré algo sobre

LA FABRICACIÓN DEL ACERO

A esta fabricación se destina la mayor parte de la fundición producida en los altos hornos, y sólo la *octava* parte de ella se emplea en su estado original para *moldeo*.

Fig. 15. — Convertidor Bessemer en acción (según B. Stoughton)

El *afino* de la fundición se efectuaba antes en *forjas* y *hornos de pudelación* solamente, los cuales están ahora desapareciendo : actual-

mente se usan los convertidores, los hornos Siemens-Martín y hornos eléctricos. En el supuesto de que parte de los lectores no tenga conocimientos de los principios de estos procedimientos, haré la siguiente reseña :

En los convertidores *Bessemer* y los de *Thomas,* se vierte fundición fundida y se hace pasar a través de ella una fuerte corriente de aire que *oxida* el carbono y otros elementos aleados (fig. 15). En consecuencia, la temperatura se eleva y el hierro se mantiene en estado líquido, de manera que se puede verter cuando alcanza la composición deseada.

El proceso *Bessemer* tiene su mayor aplicación en la América del

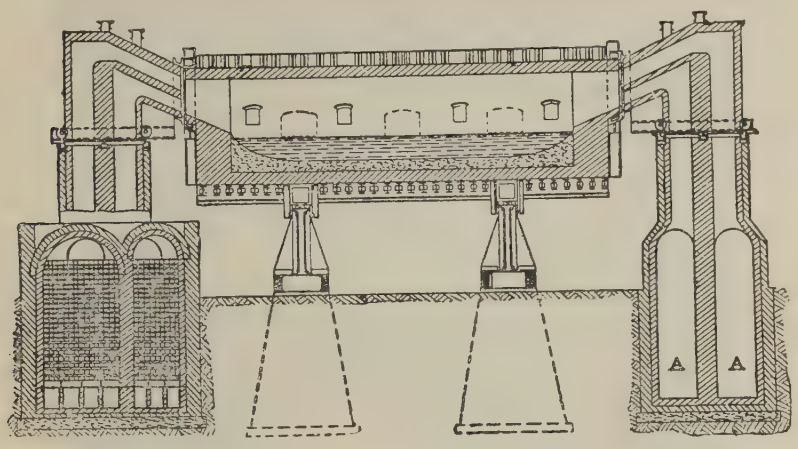


Fig. 16. — Horno Siemens-Martín basculante con los regeneradores de calor

norte, pero está desapareciendo porque escasean ya los minerales libres de fósforo con que se produce la fundición necesaria la cual, en muchos casos, tiene un alto costo.

El proceso *Thomas,* análogo al de *Bessemer,* pero básico, se usa principalmente en Alemania, Bélgica, Luxemburgo y Francia, y se basa en los minerales oolíticos de Lorena y los minerales fosforados de Suecia, pues la fundición destinada a este proceso ha de contener un 2 por ciento de fósforo. A la economía del método contribuye un subproducto : la obtención de fosfato de cal, utilizado como abono.

En los *hornos Siemens-Martín* (fig. 16) se emplea fundición líquida o lingotes, y la oxidación del carbono se efectúa más lentamente con *mineral de hierro.* También se puede rebajar el porcentaje de carbono, *diluyendo* la fundición con desechos y residuos de hierro y acero. El

horno debe siempre calentarse a temperaturas muy altas, por medio de carbón, petróleo o leña.

En el continente europeo hay una fuerte competencia entre el pro-

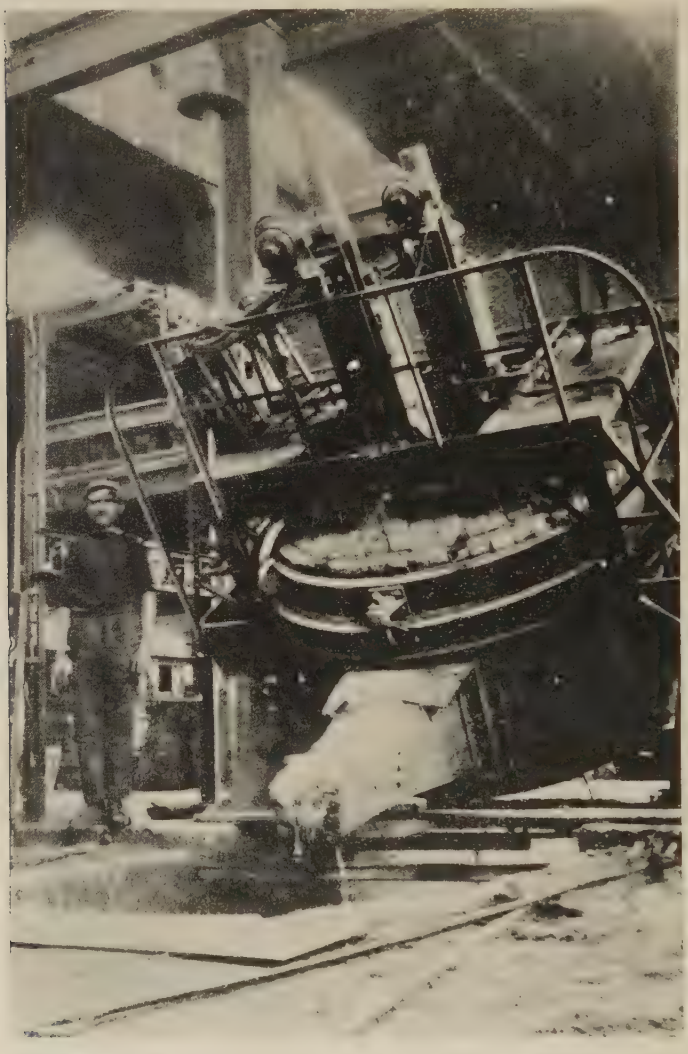


Fig. 17. — Horno eléctrico de acero de las fábricas Fiat (Italia)

ceso *Thomas* y el proceso *Martín básico,* el que también *puede* beneficiar fundición fosforada. Este último método resulta ser. efectivamente, el más usado en el mundo entero; mientras que el proceso *Martín ácido* tiene un uso muy limitado.

Los hornos más modernos son los *eléctricos* (fig. 17); sin embargo no se prestan para el afino de fundición, sino más bien para *refinación y acabamiento* del acero, producido por otros métodos, especialmente cuando se trata de acero aleado, y para *refundicion de hierro viejo.*

DOS TENDENCIAS PRINCIPALES

En la actualidad, se notan dos tendencias que dominan la industria del acero :

La una se caracteriza por el empleo de *fundición* como materia prima, con ninguna o muy poca adición de hierro viejo;

La segunda es la utilización de *residuos* de hierro, solos o mezclados con fundición; *la economía del procedimiento se funda entonces en el empleo del hierro viejo.*

El método *Martín* ha sido el primero que pudo utilizar mayores cantidades de residuos, y a ese propósito fué inventado; pero actualmente el método eléctrico es también un gran consumidor de dicho material. Junto con el desarrollo técnico de estos métodos, el hierro viejo ha tenido un uso siempre creciente que, a su vez, ha contribuído grandemente a la hegemonía del proceso Martín y al desarrollo del método eléctrico. Esto puede comprobarse, considerando algunas cifras estadísticas.

LA IMPORTANCIA DEL HIERRO VIEJO EN LA SIDERURGIA

La cantidad de residuos de hierro que anualmente se funden en todos los hornos de acero del mundo sobrepasa la cifra colosal de 30 millones de toneladas. La participación de tales residuos en la producción de algunos países se ve en el siguiente cuadro :

Cantidad de residuos utilizados en la fabricación de acero, en por ciento del acero producido

	1913	1925
Italia	?	85
Polonia	56,6	57,5
Suecia	42	52
Reino Unido	30	50
Alemania	38	43,8
Austria	?	43,5

	1913	1925
Estados Unidos	27	40
Checoeslovaquia	?	30
Francia	25	29
Bélgica	11,5	14,7
Luxemburgo	2,7	5,4

Estas interesantes cifras nos demuestran la forma en que *aumenta* la importancia del hierro viejo en los citados países. Fuera de los hornos de acero, se emplean también grandes cantidades de hierro viejo en los altos hornos y en los cubilotes de las fundiciones, etc. El consumo global de residuos de hierro en la industria siderúrgica, asciende, por lo tanto, a 45 millones de toneladas por año como mínimum, *o sea casi la mitad de la producción mundial de acero.*

El hierro está supeditado a una *circulación* continua: se reduce del mineral, se le transforma en acero y luego se presenta al consumo; pero, después de algún tiempo, vuelve otra vez a los establecimientos siderúrgicos en forma de hierro viejo y empieza un nuevo período de su vida. Lo que verdaderamente se gasta y desaparece, a causa del uso, oxidación, corrosión, enterramiento, etc., es relativamente poco en comparación con el hierro en uso, o sea un 0,3 por ciento del mismo.

Por consiguiente, los altos hornos hacen aumentar rápidamente la cantidad de hierro acumulado en el mundo, y así llegaremos a una época en la cual el mundo tendrá suficiente cantidad de hierro y solamente habrá necesidad de reemplazar lo gastado por oxidación, etc., y atender al aumento del consumo motivado por el crecimiento de la población; pero es imposible predecir la cantidad máxima que el mundo pueda absorber por habitante.

La *proporción* en que se usa el hierro viejo en la siderurgia depende también de otro factor, o sea el *período de circulación* del hierro; mientras más corto sea el tiempo que los artículos de hierro estén en uso, mayores serán las cantidades de residuos disponibles y proporcionalmente menor el consumo de hierro mineral. En estos tiempos de rápidos progresos, el período del hierro tiende a ser cada vez más corto, pues los artículos y maquinarias que este año son modernos, el que viene ya no lo serán, y así sucesivamente. Se calcula el período de todo hierro circulante en 25 años, como término medio: después de cuya época, la producción anual de residuos será igual a la producción actual de hierro nuevo (1).

En la mayoría de los países productores de hierro, la demanda del

(1) Véase: K. Klinger, *Schrotthandel und Schrottversorgung*, Berlín, 1924.

hierro viejo es mayor que los recursos propios de este material. Entre los pocos países exportadores de hierro viejo figura Francia y el mayor importador es Italia. En muchos países que cuentan con una industria siderúrgica, *la exportación de hierro viejo está prohibida,* o por lo menos restringida, por ser el hierro viejo una materia prima tan importante como el mineral o más todavía.

No puedo omitir un ejemplo instructivo: en Suecia, cuya industria siderúrgica desde tiempos antiguos ha sido fundada en buenos y abundantes recursos minerales, y que exporta anualmente 10 millones de toneladas de mineral de hierro, también la exportación de residuos está prohibida. En aquel país son de especial importancia, tanto por su cantidad como por su calidad, los recortes, etc., que se producen en las mismas fábricas de acero.

Como otro ejemplo, citaré una industria de hierro creada casi enteramente a base de hierro viejo: a saber, la de Italia. Interesantes al respecto son las siguientes estadísticas:

La industria siderúrgica en Italia. Miles de toneladas

	1913	1926
Producción de:		
Mineral de hierro	603	523
Fundición	427	522
Acero	846	1883
Acero al horno eléctrico	3 %	14 %
Importación de:		
Mineral de hierro	8	404
Fundición	222	177
Hierro viejo	326	766

Como se ve, la producción de acero en Italia se ha duplicado desde el año 1913 a causa de un gran consumo de hierro viejo; y más de la mitad de este consumo ha sido atendida por importación de residuos.

ACERO ARGENTINO A BASE DE HIERRO VIEJO

Es en vista de estas tendencias de la siderurgia moderna que debemos estudiar una futura producción de acero en la República Argentina. Nadie puede negar que la industria del hierro es la más importante de la actualidad. Ningún país que quiera destacarse política y económicamente, puede permanecer ajeno a esta actividad industrial; y ha de ser opinión unánime que el desarrollo de la Ar-

gentina no debe, ni puede, limitarse a la agricultura y la ganadería: sólo contando con una industria próspera el país podrá adquirir la alta posición a que aspira.

La producción de hierro y acero en la Argentina debe fundarse, principalmente, en la utilización del hierro viejo. Para países que consumen mucho hierro y no poseen los minerales correspondientes, el hierro viejo es la materia prima más importante. Esto tendrá un sentido mucho más acentuado cuando falten también yacimientos carboníferos, lo que se desprende de la siguiente consideración: el mineral de hierro requiere, para su fundición en el alto horno, una cantidad de coque que iguala a la del hierro producido; y, además, el hierro fundición requiere todavía un 30 por ciento de carbón de piedra para convertirse en acero; pero, el hierro viejo sólo necesita combustible para su refundición.

Los residuos tienen por lo tanto un *doble valor,* porque substituyen no solamente a una mina de hierro, sino también a una mina de carbón; aún más, los residuos se producen en los mismos centros de consumo, mientras que los yacimientos minerales hay que ir a buscarlos en los remotos desiertos y montañas; y, por último, la producción de hierro viejo no se extingue, como suele ocurrir con los yacimientos, sino por el contrario aumenta año tras año.

A quien le interese algo la industria siderúrgica del país, le parecerá extraño que se permita la exportación del hierro viejo. El país está regalando, propiamente dicho, al extranjero el único recurso explotable de hierro que posee, junto con su equivalente en coque; los establecimientos italianos que compran el hierro viejo pueden pagar en Italia de 200 a 250 liras o sea de 25 a 30 pesos moneda nacional la tonelada, y este precio no puede resultar muy beneficioso para el exportador argentino, que tiene que pagar fletes y otros gastos. En realidad, la Argentina manda su hierro viejo a Europa para fundirlo allí, pagando el transporte de ida y vuelta y todos los gastos inherentes.

Sobre este particular, la Dirección General de Minas ha hecho sus gestiones ante la superioridad, e insistido repetidas veces en la conveniencia de prohibir dicha exportación.

LA PRODUCCIÓN DE HIERRO VIEJO EN LA ARGENTINA

La primera cuestión que se plantea entonces, es si la producción nacional de residuos es de tal magnitud que sea de importancia para

la industria. A esto se puede contestar primeramente que la producción de hierro viejo, en relación al hierro en uso, no debe ser mucho menor que la de otros países, de donde tenemos estadísticas tan dignas de atención.

Pero vamos a entrar más en materia y a considerar el *consumo de hierro y acero en la República,* tal como se le conoce por la estadística de la importación. La curva A, en la parte superior de la figura 18, demuestra la importación anual en toneladas, desde el año 1886, de todo hierro y acero, tanto en forma no trabajada, como en productos acabados, máquinas, vehículos, etc.

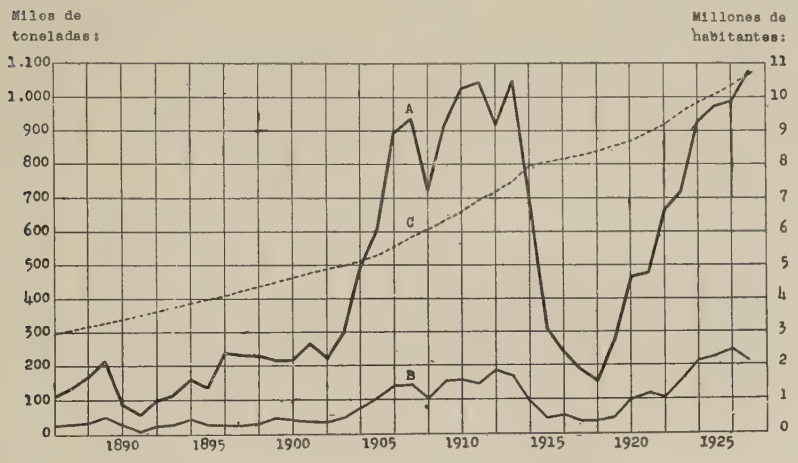


Fig. 18. — A, La importación total de hierro y acero y sus artefactos; B, La importación de artefactos de hierro y acero; C, La población de la República

En cambio la curva B, en la parte inferior de la misma figura, se refiere solamente al tonelaje de máquinas, vehículos, implementos, etc., que en la estadística figuran bajo el nombre de *artefactos* de hierro. Esta cantidad es aproximada, porque la he calculado muchas veces a base de las unidades importadas.

Al primer golpe de vista se observa el enorme aumento en el consumo durante los años 1904-1906, debido al fuerte desarrollo de la red ferroviaria. La depresión causada por la gran guerra y postguerra fué grande, y ha extendido sus efectos hasta los últimos años. Recién en el año 1927 la cantidad total pasó de un millón de toneladas, cifra máxima antes de la guerra.

Es también de interés tomar en cuenta el aumento de la población, representado por la curva C (fig. 18); y si se calcula *el consumo de*

hierro por habitante, se obtiene la curva superior A, de la figura 19, en la cual se destaca aún mejor el carácter accidental del gran consumo durante 1906-1913. Si éste se compensase con el consumo muy reducido durante y después de la guerra, se obtendría una curva de constante subida.

A base de una curva así allanada debe calcularse la probable producción de hierro viejo en la República porque, como es muy natural, faltan datos exactos al respecto; en los países productores de hierro, la *producción* de residuos y desechos de hierro es practicamente igual al *consumo* de estos materiales más el sobrante de exportación;

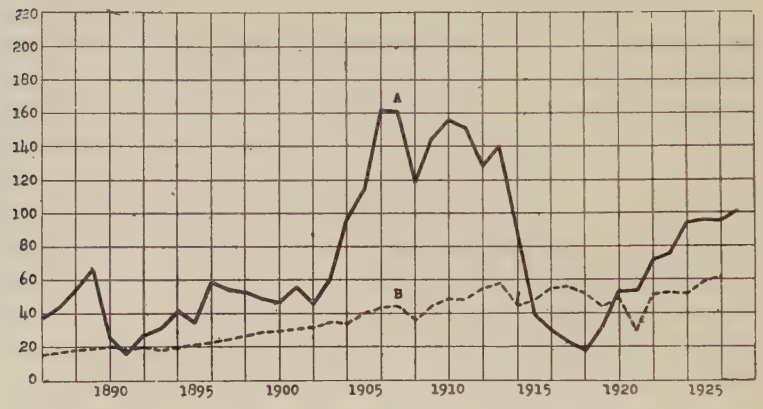


Fig. 19. — A, El consumo de hierro y acero y sus artefactos en la Argentina comparado con el consumo mundial (B) en kilogramos por habitantes

pero en la Argentina no se aprovecha todo el hierro viejo porque la siderurgia lleva una vida precaria, y la exportación, aunque libre, no puede recoger todos los residuos a causa de los elevados gastos de transporte.

El *consumo* nacional de hierro viejo y la *exportación* del mismo han alcanzado, como término medio en estos últimos tiempos, de 60 a 70 mil toneladas por año, de las cuales la mayor parte corresponde a la exportación; pero la cantidad total de hierro viejo que se *produce* monta por lo menos al doble. Esto se desprende de *dos cálculos diferentes* que pueden hacerse a base de la estadística de la importación. Según el primero, se toma como punto de partida la cantidad total de hierro importado al país, la cual acumulada desde el año 1875 asciende a 20 millones de toneladas como mínimum; y usando el mismo factor como vigente para todo el mundo en ge-

neral (1), se llega a una producción de 150.000 toneladas de hierro viejo por año.

Según *el otro cálculo,* partiendo de un período de 30 años de circulación del hierro, se obtiene la cifra de 200.000 toneladas por año. Este resultado aproximado podría corregirse por cálculos más completos, especificando en lo posible las distintas clases de hierro importado.

Ya la producción actual de hierro viejo sería suficiente para crear una pequeña industria siderúrgica, usando también fundición extranjera; pero lo que a mi juicio merece la mayor atención, es que la producción de hierro viejo y residuos de toda clase, dentro de poco habrá aumentado considerablemente y muy pronto será doble; y si los cálculos no fallan, el país podrá disponer, *dentro de 25 años, de un millón de toneladas de hierro viejo anual,* o sea igual cantidad que la importada anualmente de hierro y acero.

EL HIERRO VIEJO DEBE UTILIZARSE EN EL PAÍS

Ante tales perspectivas, el hierro viejo adquirirá una importancia imprevista y no será posible prescindir de su utilización. Un problema primordial es, entonces, el del combustible o energía; y es razonable abrigar esperanzas de que se puedan aprovechar recursos nacionales a este propósito, ya fuere petróleo o fuerza hidroeléctrica.

Cierto es que una industria siderúrgica argentina podrá ser un gran consumidor de energía, siempre que ésta sea barata. Por el momento no se puede fijar el precio máximo que pueda pagar una fábrica de acero; pero seguramente el kilowatt-hora no debe costar mucho más de medio a un centavo moneda nacional, para que la electricidad pueda *competir con el carbón de piedra* en la producción de *lingotes* de acero.

Hasta tanto, me parece conveniente prescindir de la fuerza eléctrica para la fabricación de dicha clase de acero, mientras la explotación de energía barata no esté en vías de poderse realizar.

En mi opinión, una industria de hierro puede desarrollarse bajo las condiciones ya existentes en cuanto a materias primas; el país no debe contentarse con esperar hasta que se descubran yacimientos minerales, y vale más tomar desde ya medidas efectivas para hacer

(1) Véase: *Jernkontorets Annaler, Diskussionsmötet,* Estocolmo, 1928.

viable y facilitar la implantación de dicha industria, sin perderse en discusiones estériles sobre riquezas hipotéticas.

Si realmente en la Argentina no se pudiese utilizar económicamente el hierro viejo, tampoco sería posible entonces para la siderurgia nacional explotar ningún yacimiento de hierro por grande que él fuere. No faltan ejemplos de países poseedores de minerales de hierro y de carbón que han tropezado con grandes dificultades al querer introducir una industria siderúrgica; pero, en cambio, si la fabricación de acero a base de residuos, etc., se arraiga, es más fácil aprovechar también los minerales de hierro que eventualmente se encuentren. En este caso, la búsqueda de minerales cobrará más impulso y el capital se interesará más por explotaciones mineras.

Una cuestión de gran cuantía es el *transporte* del hierro viejo, que debe facilitarse de todas maneras. El flete ferroviario de este material es muy alto, en comparación con el de Europa y Norte América, lo que resulta desfavorable para la competencia con el extranjero. En cambio, los fletes para productos acabados no tiene influencia en este sentido.

Es menester insistir sobre una de las condiciones fundamentales, como es la necesidad de fomentar el consumo de aquellas clases de hierro y acero que fácilmente puedan producirse en pequeños establecimientos. Por consiguiente, los talleres mecánicos, las fábricas de implementos agrícolas, etc., las herrerías, las fundiciones y muchas otras industrias consumidoras de hierro son la clientela necesaria para una siderurgia argentina. Ahora bien, si es preferible *importar* las máquinas, los implementos y artículos de hierro, ¿para qué, entonces, tener una producción de hierro y acero? Esto hay que tener en cuenta cuando se trata de

LA REGLAMENTACIÓN ADUANERA

Sin una amplia reforma de las tarifas aduaneras que rigen para el hierro y sus artefactos, no prosperarán jamás ni uno ni otro ramo de la industria de hierro. No es el momento de discutir aquí los pormenores de tal reglamentación, pero sentaré algunos principios que tal vez puedan servir de base, y concretaré los siguientes puntos:

1° Prohibir la exportación de hierro y acero viejo;

2° Importación libre de las materias primas a usarse en la siderugia, que no se produzcan en cantidad suficiente en el país;

3° Importación libre de hierro y acero en lingotes, tochos y semiproductos;

4° Aplicar aranceles sobre productos y artículos de hierro y acero, maquinarias, etc. que compitan con los de fabricación nacional; debiendo pagar menos los productos de laminación que los artículos que de ellos se fabriquen, de acuerdo con una escala proporcional;

5° Conviene facilitar la fundación de establecimientos siderúrgicos y, además, otorgar premios para producción nacional de acero fundido, de manera que éste pueda competir con lingotes y semiproductos importados, los cuales no deben pagar derecho.

Estos cinco puntos, que he esbozado como un programa de acción de parte del estado, encontrarían seguramente varias objeciones, y la primera de ellas partirá de los productores y exportadores de hierro viejo. Ellos podrían decir que, desde el momento que el hierro viejo en realidad no se utiliza en la Argentina, debe exportársele, para dar ganancia tanto a los particulares como al país en general. — Es precisamente para desvirtuar este argumento que deben tomarse las medidas citadas: una vez establecida la fabricación de acero, la venta de hierro viejo dará mejor beneficio y el país podrá anotar una nueva conquista en su desarrollo industrial. En cuanto a cierta clase de hierro viejo, a saber: el de fundición gris para moldeo, los mismos proveedores pueden reconocer que sus residuos ya tienen una demanda tan grande, que su precio casi iguala al de fundición importada.

Otras protestas pudieran llegar de parte de algunos importadores que creyeran perjudiciales estas medidas para sus negocios; pero a mi juicio no hay ningún peligro, porque no se puede contar con un efecto inmediato y, fuera de eso, la importación está creciendo tan rápidamente que, no obstante una producción nacional, habrá margen todavía para dicha clase de negocios.

Objeciones más serias pueden hacer los agricultores y otros consumidores de artículos actualmente libres de derecho; por este motivo, y para no poner obstáculos a las industrias madres del país, que el gobierno ha querido favorecer con importaciones libres, la aplicación de nuevos derechos debe hacerse con prudencia, estudiándose cada caso para que se puedan imponer aranceles únicamente a aquellos objetos que ya se fabrican o fácilmente puedan fabricarse en la República, siendo preferible un derecho más elevado sobre ciertos artículos cuya importación pudiera hacerse superflua, que un derecho insuficiente sobre todos los implementos agrícolas, etc.

Si se aplicasen los derechos según estos principios, se facilitaría el período inicial de la industria, que siempre es el más crítico. Una vez establecida la fabricación, no tardará la competencia local en rebajar los precios de venta, y las tarifas no encarecerán más el mercado. Que así ocurre no hay que dudarlo, desde que ésta es una experiencia que se ha hecho muchas veces, tanto en este país como en otros.

La política del hierro debe basarse en estudios técnicos y económicos y estadísticas apropiadas. En cuanto a los recursos minerales, la Dirección General de Minas, Geología e Hidrología tiene a su cargo hacer estos estudios y estadísticas; pero también respecto al hierro viejo, como materia prima y su utilización técnica, la misma institución ha iniciado ya sus investigaciones.

En esta conferencia he llamado la atención sobre algunos aspectos de la siderurgia, de interés para este país. He considerado, a grandes rasgos, las materias primas y los procesos; pero la siderurgia tiene también otra faz que se refiere al perfeccionamiento del producto, al acero mismo, sus propiedades y su uso. Sólo quiero mencionar que la ciencia de metales, llamada *metalografía,* ha surgido de la industria y le ha prestado los más valiosos servicios. Aunque el tamaño de los hornos llegara en el futuro a ser más admirable que ahora, el interés mayor sería absorbido por las conquistas de la metalografía, el mejoramiento del acero e inventos de nuevos aceros aleados. Es la metalografía la que en alto grado ha contribuído la introducción de de métodos científicos en la siderurgia.

Es cierto que a la industria argentina la ocupan aún, en primer lugar, los problemas económico-políticos; pero quiero aprovechar esta oportunidad para expresar mis votos de que no esté lejano el día en que también la *ciencia* y *tecnología argentinas* tengan motivos para contribuir al grandioso desarrollo de la siderurgia.

Buenos Aires, junio 20 de 1929.

SOBRE LA PRESENCIA DE TOXODONTES HAPLODONTÉRIDOS

EN EL

PISO ARAUCANENSE DE CATAMARCA «TOXODONTHERIUM ANDINUM» N. SP.

Por LUCAS KRAGLIEVICH

RÉSUMÉ

Sur la présence de toxodontes haplodonthéridès, dans l'étage araucanien de Catamarca «Toxodontherium andinum» n. sp. — L'auteur, se basant sur quelques restes fossiles qui existent au Museum de Buenos Aires, affirme l'existance de toxodontiens de la famille des Haplodonthéridès dans l'étage araucanien de Catamarca. Il fait une description de ces restes, qui ont appartenu a un grand haplodonthéridè qu'il nomme *Toxodontherium andinum*.

Los toxodontes de la familia *Haplodontheriidae* no habían sido aún mencionados en la fauna del piso araucanense de Catamarca, aunque su presencia en ella era sin embargo presumible, dado que se les conocía en faunas más antiguas y más recientes que la mencionada.

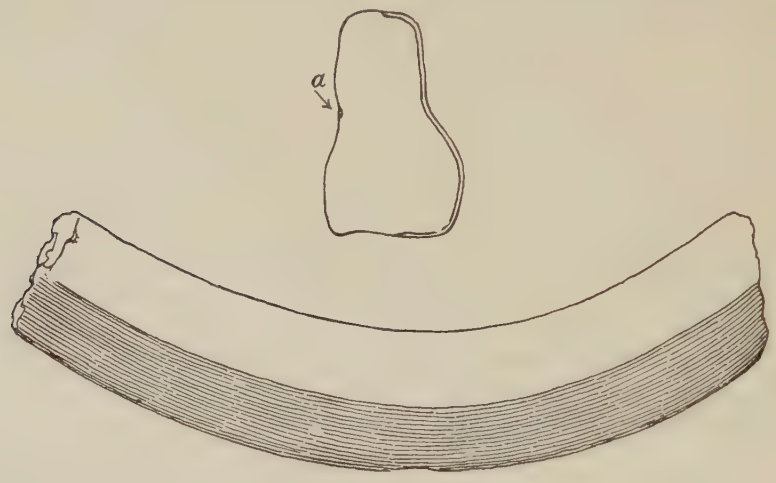
Ahora estoy en situación de afirmar que existieron allí positivamente, basándome en algunos restos fósiles que se conservan en el Museo de Buenos Aires.

Sabido es que lo que principalmente caracteriza la dentadura inferior de los haplodontéridos, es la ausencia o, en todo caso, la atrofia del primero de los dos pliegues linguales de esmalte, existentes en los verdaderos molares de los toxodontes típicos *(Toxodontidae)* y xotodóntidos *(Xotodontidae)*, heredados de los nesodóntidos que fueron antecesores de todos estos ungulados. De este modo, la cara lingual de los verdaderos molares de los haplodontéridos poseía un solo pliegue de esmalte profundo, situado cerca de la extremidad posterior.

En cuanto al significado filogenético de la ausencia de dicho pliegue, no hay duda que obedeció a un gradual proceso eliminatorio, como lo he comprobado por el hallazgo de varias especies en las que el pliegue, sin ser muy penetrante, se conserva o se halla reducido a un surco enteramente superficial.

Los restos fósiles aludidos son un p_4 aislado y una mandíbula juvenil.

El p_4 (n° 8204, colec. paleont. Mus. Nac.) es del lado derecho; mide 102 milímetros de largo en línea recta y presenta una regular curvatura, con la convexidad en el lado externo. La corona está biloba-



da por dos amplios surcos opuestos : uno interno y otro externo; aquél, con su fondo situado casi en el medio de la respectiva cara, y el otro desviado adelante, de modo que la parte anteroexterna forma una columna algo aplanada de 11 milímetros de ancho, y la parte posteroexterna otra columna redondeada mucho más grande. El lóbulo anterior es bastante más estrecho que el posterior. Los dos cantos anteriores están casi en ángulo recto, aunque redondeados; el interno posterior es un poco agudo, y el posterior externo obtuso y más redondeado que los otros. La espesa capa de esmalte, que cubre la cara externa, da vueltas sobre los cantos anterior y posterior y cubre la mitad de la cara anterior y algo más de una tercera parte de la posterior. El fondo del amplio surco interno está recorrido, en toda su extensión, por una línea (*a*, fig.) de esmalte de 1 milímetro de ancho. La longitud del diente, siguiendo la convexidad externa es de

110 milímetros; el diámetro anteroposterior 32 milímetros; ancho transverso del lóbulo anterior 13,3; ancho transverso mínimo 11; ancho transverso posterior 18,5.

Este diente perteneció a un gran haplodontérido y, como no he hallado ninguno otro igual entre los numerosos ejemplares de la fauna de Entre Ríos que he examinado, lo adopto como tipo de una nueva especie de *Toxodontherium* que propongo denominar *T. andinum*.

La mandíbula juvenil conserva la rama derecha y la mitad anterior de la rama izquierda; mide : 31 centímetros de longitud desde el borde posterior; 10 centímetros de altura al comienzo de la sínfisis, y 9 detrás del m_3, que se halla en erupción. La sínfisis es muy levantada, convexa y relativamente estrecha.

En la rama izquierda de la mandíbula se ven las puntas sobresalientes, y apenas gastadas por la masticación, del segundo y tercer incisivos; y en la rama derecha el i_2 se ha fracturado y perdido, mientras el i_3 recién está en erupción con su ápice intacto. En cuanto a los incisivos medianos (i_1), no es posible decir si existieron ambos o uno solo como en *Trigodon*. Los incisivos son triangulares, pero comprimidos en dirección buco lingual.

El p_3 izquierdo se encuentra en erupción; la cara externa es bilobada por un surco situado en su tercio anterior y el lóbulo posterior presenta un relieve o cresta longitudinal mediana que no existe en *Trigodon* o, en todo caso, se le encuentra ubicado más atrás, junto al borde posterior, de la cara externa. El costado interno se halla también excavado por una pronunciada y amplia canaladura mediana. La parte posterior del diente, es mucho más ancha que la anterior. El diámetro anteroposterior mide 20 milímetros y el transverso máximo 11.

El diente que sigue a éste es el cuarto molar caduco, es decir dm_4, cuya corona termina, debajo, en dos raíces externas, pero se mantiene todavía bastante larga, de modo que el molar se hallaba lejos aún de ser reemplazado por el premolar cuarto. La cara externa está incidida en su tercio anterior por un surco que da origen a un lóbulo anterior angosto y redondeado, el cual disminuye de ancho hacia abajo a medida que el surco que lo origina se acerca al cuello del molar. El costado interno presenta un surco mediano angosto. La parte posterior del diente es apenas más ancha que la anterior. El esmalte que cubre la cara externa desciende hasta las raíces y da vueltas sobre la cara posterior; pero la faja esmaltada de esta cara disminuye de anchura progresivamente al acercarse al cuello del mo-

lar, donde se elimina por completo. La corona se ha roto a distancia de 30 milímetros encima de las raíces y en dicha superficie de rotura mide : 25 milímetros anteroposteriormente; 15 de ancho delante, y 15,6 detrás. En dirección hacia las raíces, el ancho transverso aumenta sensiblemente.

Los verdaderos molares m_1, m_2 y m_3 han entrado ya en función, pero distan mucho de haber alcanzado su tamaño definitivo, sobre todo el m_3.

La cara externa esmaltada de estos molares presenta un surco profundo, cerca del extremo anterior, que origina allí una columna redondeada y prominente. Del lado interno hay una columna casi igualmente destacada, opuesta a la precedente pero desprovista de esmalte y, detrás de este elemento, la cara lingual está recubierta, en su mayor parte, por una capa de esmalte que, en m_1 y m_2 forma un solo y profundo repliegue situado cerca del extremo posterior de estos molares.

NOTAS VARIAS

Luis Luiggi

GÉNOVA 1856 — ROMA 1931

El telégrafo nos ha anunciado, el 1° de febrero, la muerte del ingeniero Luis Luiggi, sucumbiendo a una apoplegía. Tenía el extinto 75 años de edad y desde muchos años atrás era socio correspondiente de la Sociedad Científica Argentina.

Son conocidos los servicios prestados por él en nuestro país donde actuó entre 1897 y 1905, llamado que fué para dirigir las obras del puerto militar de Bahía Blanca. Los socios de nuestra sociedad que visitaron ese puerto, en octubre del año 1902, conservan muy grato recuerdo del ingeniero Luis Luiggi, que atendió con toda deferencia a los visitantes.

El ingeniero Luis Luiggi ha actuado en nuestros Congresos científicos varios, presentando, entre otros estudios, los titulados:

Faros en las costas argentinas; El gran dique de carena del puerto militar de Bahía Blanca; Precauciones para el empleo del cemento armado en obras marítimas, etc.

Era un gran amigo de nuestro país, que ha sentido profundamente su fallecimiento. Miembro correspondiente de nuestra Academia de Ciencias, ésta publicará en el número próximo de los *Anales* una noticia más completa.

Profesor Lucas Kraglievich

El distinguido colaborador de nuestros *Anales,* paleontólogo don Lucas Kraglievich, ha debido abandonar este país, su patria, a raíz de los sensibles incidentes producidos en el Museo «Bernardino Rivadavia».

Aceptando un ofrecimiento del director del Museo de Historia Natural del Uruguay, se ha trasladado a Montevideo donde, acogido en un ambiente científico enteramente favorable que le ha brindado toda clase de facilidades, ha iniciado sus trabajos paleontológicos.

Nunca se lamentará bastante la despreocupación que, entre nosotros, suele demostrarse para con los sabios de verdad cuando ellos, como ocurre casi siempre, debido a la modestia y discreción que caracteriza a esta clase de hombres, rehuyen el sistema de la adulación y del equilibrismo en sus diversas formas.

Tal es el sentimiento que se puso de manifiesto en la significativa demostración de que fué objeto el señor Kraglievich el día 20 de diciembre de 1930, de parte de un numeroso núcleo de intelectuales independientes. En ese acto se hizo constar que el señor Kraglievich tiene a su haber veinte años de investigaciones, de los que catorce de productividad; que es autor de cincuenta trabajos científicos sobre gravígrados, roedores, carniceros, ungulados y aves fósiles; que hasta ahora ha enriquecido nuestra fauna mamalógica extinguida con 45 géneros nuevos y 80 especies igualmente nuevas; que al servicio del Estado tiene en su haber : diez y seis años de servicio (1914-1930), de los que cinco años de iniciación gratis; los cincuenta trabajos antes recordados; diez y nueve monografías; 11.000 piezas clasificadas, numeradas y catalogadas; la formación de ficheros; conferencias gratis y artículos de diarios también gratis, — con un sueldo mensual medio en los servicios remunerados, incluyendo viáticos, que por resultar tan miserable preferimos no expresarlo.

El profesor Kraglievich es nativo de la provincia de Buenos Aires; procede de una estancia ubicada en el partido de Balcarce. Estudió en nuestra Facultad de Ciencias ingeniería mecánica, carrera que abandonó, faltándole sólo una materia para recibirse, cediendo a su irresistible vocación por la paleontología; ingresó al Museo Nacional de Historia Natural con el apoyo del ilustre doctor Eduardo L. Holmberg.

Hacemos votos por la pronta vuelta entre nosotros de este distinguido hombre de ciencia, oficialmente desagraviado como corresponde.

BIBLIOGRAFÍA

Por C. C. D.

---

a) EN IDIOMA CASTELLANO

Boffi, Luis Leopoldo, *Colonias marítimas de ninos débiles.* Un folleto de 22 páginas, 18 × 26,5, con 11 figuras. Imprenta Ferrari Hnos., Buenos Aires, 1930.

El autor, ex médico de la Colonia de Necochea, ha publicado este folleto en el que, después de unas nociones sobre profilaxis, se ocupa de los factores naturales a tener en cuenta en las colonias: clima, sol y baños de mar; selección de los niños; actividades de éstos en las colonias; alimentación; vestuario; organización interna. Termina haciendo una referencia especial de la Colonia de Necochea.

Buich, Raul, *La investigación de las tensiones elásticas mediante la luz polarizada.* Un tomo en 8° (16,5 × 26,5), con 130 figuras en el texto y 6 láminas fuera del texto, de las que 4 en colores. Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1929.

Se trata de una tesis presentada por el autor ante la Facultad de Ciencias de Buenos Aires para optar al título de docente libre de la cátedra de Resistencia de materiales. Una Comisión especial aconsejó que ese trabajo fuese publicado por cuenta de la Facultad, y así se hizo. Es un interesante trabajo de vulgarización. Comienza con recordar ciertas cuestiones de óptica física; luego expone la teoría general de este método de investigación de las tensiones, y por último, presenta las conclusiones y las fotografías de los ensayos más interesantes hechos por varios experimentadores.

Los títulos de los diversos capítulos son los siguientes: Primera parte: *Recopilación de elementos fundamentales.* Síntesis de las teorías acerca de la naturaleza de la luz; El movimiento ondulatorio; Propiedades generales de las ondas luminosas. Segunda parte: *Los fenómenos de polarización y birrefringencia.* Polarización de la luz; El movimiento vibratorio en los me-

dios anisótropos; El fenómeno de la birrefringencia; Teoría de la misma; El prismo de Nicol; La polarización cromática. Tercera parte: *Fotoelectricidad.* Doble refracción accidental; Generalidades sobre la aplicación de la birrefringencia para el estudio de las tensiones elásticas; Deducción de elementos que caracterizan el estado elástico en base a las líneas isoclínicas e isocromáticas obtenidas por procedimientos fotoelásticos; Diferencias de las tensiones principales; Métodos de reducción a cero (por compensación) para el cálculo; Suma de las tensiones principales; Procedimientos para su determinación. Cuarta parte: *Determinaciones experimentales.* Casos de resistencia analizados por los ingenieros Colonnetti y Pugno; por A. Menasger y E. G. Coker. Apéndice: *Síntesis del método óptico de Enrique Favre para la determinación de las tensiones elásticas.*

Bustamante y Urrutia, José Mª de, *Catálogo de la Biblioteca «América», IIº Catálogo alfabético de autores de folletos.* Un tomo en 8º (18 × 25,5), VIII + 452 páginas. Litografía e imprenta Roel, La Coruña, 1929.

El jefe de la biblioteca universitaria de Santiago de Compostela ha redactado este interesante catálogo que menciona más de cinco mil folletos, gran parte de los cuales de autores argentinos. El libro se publica bajo el «Patronato Universitario Compostelano». Estos catálogos de la Biblioteca «América» comprenden ya otro anterior, también por orden alfabético de autores de obras de más de 200 páginas que representan una cuarta parte, más o menos, del fondo que guarda la Biblioteca. Se anuncian otros catálogos más de esta serie, sin contar el que se publicó en 1927 con cargo a *Anales de la Universidad de Santiago.* Todos estos proyectos se realizan gracias al desprendimiento y perspicaz orientación del rector de dicha Universidad, señor Blanco Rivera.

Castiñeiras, Julio R., *Tablas para el cálculo de momentos, etc.* Un folleto 18 × 26, 54 páginas, Tomás Palumbo, Buenos Aires, 1930.

Se trata de 36 tablas para el cálculo de momentos, fuerzas de corte y reacciones en vigas continuas de dos, tres y cuatro tramos, sometidas a cargas y sobrecargas concentradas y uniformemente repartidas. Con ellas pueden calcularse los momentos máximos y las ordenadas de momentos máximos positivos y negativos. Como son algo más completas que las corrientes, permiten disminuir las operaciones de interpolación. La relación entre el peso propio y la sobrecarga varía de cinco en cinco centésimos desde 0 a 1,80, abarcándose así todos los casos que puedan presentarse en la práctica. Unas observaciones para el empleo de las tablas preceden a éstas.

El mismo autor ha publicado una 2ª edición de su versión española del reglamento alemán para la ejecución de construcciones de hormigón simple y armado (septiembre, 1925). Es un folleto análogo al precedente con 74 páginas.

LIEBERMANN, JOSÉ, *La lucha de insectos contra insectos y su aplicación práctica en la defensa del hombre y de sus industrias.* Un folleto de 24 páginas (19 × 28), tirada aparte de un estudio presentado por el autor a la 5ª reunión de la Sociedad Argentina de Patología regional del norte, celebrada en Jujuy del 7 al 10 de octubre de 1929, Imprenta de la Universidad, Buenos Aires, 1930.

El autor, después de una interesante exposición, llega a las siguientes conclusiones: La lucha biológica científicamente dirigida puede transformarse en factor práctico de defensa del hombre, y para ello es menester realizar aquí estudios previos acerca de los huéspedes y sus parásitos enemigos naturales de las especies peligrosas. Es imprescindible la creación de un Instituto nacional de zoología aplicada, destinado a ese objeto, evitando la lucha mecánica y química que escapa al contralor científico, causando inconscientemente el aumento excesivo de las especies nocivas al hombre y a sus industrias.

LONGHINI, PEDRO, *Sobre la Teoría de los Modelos. Leyes de Semejanza Mecánica.* Un folleto (17,5 × 26), 93 páginas en 8°, 25 figuras en el texto, Tomás Palumbo, Buenos Aires, 1930.

El autor, profesor suplente de Mecánica de la Universidad de La Plata y docente libre de Mecánica en la de Buenos Aires, ha agrupado en este folleto dos trabajos referentes a la experimentación, con modelos de escala reducida: uno titulado *Importancia de la Experimentación sobre modelos en la técnica moderna;* el otro, de carácter didáctico, sobre *Elementos de la Teoría de los modelos.*

En el primero llega a la conclusión de que si, por un lado, es muy útil la experimentación hecha por medio de modelos en escala reducida, no hay que olvidar que la ley de la semejanza mecánica debe aplicarse con parquedad previo un ámplio y meticuloso estudio del fenómeno que se quiere reproducir y de la experimentación efectuada — cosa naturalmente muy sabida, pero que convenía precisar.

Es satisfactorio comprobar que alguno de nuestros jóvenes profesores universitarios trabajan, sin jactancia, en vulgarizar cuestiones interesantes, preocupándose así de su cátedra en forma digna y encomiable.

OÑATE GUILLÉN, JOSÉ, *Nuevo método de discusión de los sistemas de ecuaciones lineales.* Un folleto 12 × 17, de 32 páginas. Editorial «Voluntad», Madrid, 1930, 1 peseta.

El autor, catedrático del Instituto de San Sebastián, propone enunciar al llamado teorema de Rouché, de la siguiente manera: « La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga al menos

una solución finita o infinita, es que el número máximo de ecuaciones independientes sea igual o inferior al número de incógnitas... » Después de indicar el objeto de la memoria hace un estudio detenido del tema justificando la conveniencia de la nueva expresión del teorema propuesto.

Quinta reunión de la Sociedad Argentina de Patología Regional del Norte. Dos tomos en 8° (19 × 28) con un total de 1534 páginas y numerosas figuras en el texto, así como láminas en colores fuera del texto, Imprenta de la Universidad de Buenos Aires, 1930.

Organizada por el doctor Salvador Mazza y con el concurso de la Comisión seccional de Jujuy presidida por el doctor Vicente Bernasconi, tuvo lugar esa reunión en la mencionada ciudad de Jujuy del 7 al 10 de octubre de 1929.

He aquí una lista global de los trabajos presentados : 7 sobre patología general y medicina experimental; 27 sobre micología y bacteriología; 31 sobre dermatología y sífilis; 4 sobre fiebre amarilla; 14 sobre paludismo y hematología; 8 sobre bocio endémico; 15 sobre parasitología (protozoología); 12 sobre parasitología (helmintología); 9 sobre entomología, pura y aplicada; 13 sobre miscelánea médico-quirúrgica; 4 sobre higiene; 8 sobre historia de la medicina, historia natural y química biológica.

Entre los autores vemos los nombres de los doctores Mazza, Nicolle, Anderson, Franchini, Vaccarezza, Ozorio de Almeida, Moreira, Pittaluga, Ashford, Langeron, Fonseca, Niño, Silvio Parodi, Marchoux, Py, Borzone, Riveros, Motta, Molinelli, Motti, Bernasconi, Di Lullo, Fidanza, Obejero Paz, Margarino Torres, Hoffmann, Ramón A. López, Tijerino, Orias, Mazzocco, Arias, De Mello, Paminara, Yakimof, Mac Donagh, Antequeda, De la Barrera, etc.

b) EN IDIOMA FRANCÉS

ZAPPI, ENRIQUE V., *Sur la constitution des halogénures de cyanogène. Étude réfractométrique du chlorure et de l'iodure de cyanogène.* Dos folletos (13,5 × 21), 12 páginas en total. Tiradas aparte de un trabajo publicado en *Bulletin de la Société Chimique de France,* París, 1930.

El autor, profesor de las Universidades nacionales de La Plata y Buenos Aires, llega a las siguientes conclusiones :

Las medidas efectuadas relativamente a la refracción y dispersión molecular de soluciones de cloruro y ioduro de cianógeno indican una constitución isonitrítica o carbilamínica Cl — N ≡ C, para el cloruro y nitrílica, I — C ≡ N para el ioduro, resultados concordantes con las reacciones efectuadas.

La acción de los disolventes agua, alcohol y cloroformo, no parece producir cambio alguno tautomérico en la constitución de los halogenuros de cianógeno. La fórmula cíclica de Gutman debe rechazarse porque los va-

lores hallados para la refracción molecular de ICy son muy inferiores a los que debieran corresponder a tal constitución.

EDDINGTON, A. S., *Étoiles et Atomes,* versión del inglés por J. Rossignol. Un tomo en 8° (14 × 22,50), IX + 188 páginas con 13 figuras, doce de ellas fuera de texto. Precio : 35 francos. Hermann y Cía. París, 1930.

Se trata de una traducción de la tercera edición inglesa (con complementos del autor, hecha por el profesor J. Rossignol, de la Universidad de París) de la conocida conferencia de vulgarización dada por el eminente profesor de astronomía de la Universidad de Cambridge, en el Congreso de Oxford, de la Bristish Association, en agosto de 1926. Este sabio ha contribuído especialmente a hacer progresar nuestros conocimientos sobre la estructura del Universo, sobre todo con su libro *The Internal Contribution of the Star*, que hizo época en los anales de la Astrofísica, pero que para ser comprendido, requiere conocimientos matemáticos que no están al alcance de cualquiera.

Precisamente, para vulgarizar las conclusiones de dicho libro, es que Eddington, dotado como lo está también de facultades especiales para poner al alcance del público los temas más difíciles, ha dado y publicado las recordadas conferencias, en las que pone una vez más de relieve aquel talento de vulgarizador. Aunque al principio se trató de una única conferencia, actualmente aparecen cuatro en la traducción francesa. En la primera edición inglesa eran tres, número explicable por las razones que se exponen en el prefacio del libro. Más tarde la astrofísica consiguió identificar lo que se llamaba *nebulium*, substancia cósmica existente en las nebulosas, encontrándose que es oxígeno en cuyos átomos faltan dos electrones. Una cuarta conferencia figura ahora en la edición francesa, que ha quedado constituída de la siguiente manera :

Primera conferencia : *El interior de una estrella :* Generalidades. Temperatura en el interior del Sol. Ionización de los átomos. Presión radial y masa. Interior de una estrella. Opacidad de la materia estelar. La relación entre el brillo y la masa. Estrellas densas.

Segunda conferencia : *Algunas investigaciones recientes :* Generalidades. Historia de Argol. Historia del compañero de Sirio. Átomos desconocidos e interpretaciones de los espectros. Series espectrales. La nebulosidad del espacio. La cromosfera solar. Historia de Betelgosa.

Tercera conferencia : *La edad de las estrellas :* Generalidades. Estrellas pulsantes. La cefeide considerada como fuente luminosa-patrón. La hipótesis de la contracción. La energía subatómica. La evolución de las estrellas. Radiación de masa.

Cuarta conferencia : *La materia en el espacio intersideral :* Generalidades. Pruebas suministradas por la observación. Densidad de una nube cósmica.

Temperatura de una nube. Pruebas de la teoría. Acrecentamiento sufrido por las estrellas.

Apéndice A : Observaciones complementarias sobre el compañero de Sirio.

Apéndice B : La identificación del *nebulium*.

GRIAULE, MARCEL, *Le livre de recettes d'un dabtara abyssin*. Un tomo en 8° (18 × 27), 180 páginas. Precio en Buenos Aires, encuadernación tela, 70 francos. Institut d'Ethnologie, París, 1930.

Es el tomo XII de la colección de Trabajos y Memorias del Instituto de Etnología de la Universidad de París. En un prefacio el profesor Marcel Cohen explica cómo, estando en la provincia de Choa en desempeño de una misión científica en 1910-1911, adquirió de un «dabtara» del clero abisinio de Endotto, antigua capital (ahora suburbio de Addis Ababa) una libreta de recetas. Refiere también el profesor Griaule que, mediante un joven letrado y artista abisinio, consiguió descifrar y traducir el texto de esa libreta, la que era de procedencia europea, con 70 páginas de líneas espaciadas en 8 milímetros de 10 centímetros de ancho por 16 de alto; sólo 37 hojas de dicha libreta fueron utilizadas. El autor, en una introducción, suministra muy interesantes informaciones sobre la escritura, la ortografía, etc. Una reproducción facsimilar de las páginas y su traducción siguen luego con numerosas notas explicativas.

El objeto de esta publicación, dice el autor, es aportar una contribución al estudio de la magia abisinia; las notas explicativas recién aludidas se basan en una investigación oral hecha con los abisinios residentes en París.

Las fórmulas contenidas en la libreta son de tres clases : unas compuestas de textos religiosos o de invocaciones llamadas a transmitirse en un amuleto; otras comprenden la exposición de tratamientos exclusivamente médicos; otras son combinaciones de las dos primeras.

Los objetos perseguidos son muy diversos : combatir al demonio en las numerosas formas que le atribuyen las creencias populares; obtener la curación de una determinada enfermedad; conseguir dinero, ciencia o amor.

He aquí la tabla de materias del libro que nos ocupa :

Protección contra las influencias mágicas: bouda; mal de ojo; «maggaña»; «sotalay». *Protección para los negocios corrientes :* maleficio; enemigos; ladrones; pleitos; cárcel; evasión de esclavo; incendio; dinero; honores; larga vida; ciencia; memoria; predicción del porvenir; visiones. *Enfermedades :* en general; epidemias; generales, locales; venéreas; parásitos; heridas; inconvenientes; enfermedades no identificadas; recetas no determinadas; vida sexual.

Apéndice : zar; djinns; seriel; bouda; ojo de sombra, maggaña; sotalay; enfermedades; serpientes.

Índice : plantas; remedios; enfermedades; palabras mágicas; vocablos y sentidos inéditos; hechos gramaticales. *Bibliografía*.

ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS

FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES

LES SABLES FERRUGINEUX DE NECOCHEA

COMPOSITION CHIMIQUE ET APPLICATION À LA SIDÉRURGIE (1)

PAR LE Dr PIERRE T. VIGNAU

RÉSUMÉ

L'auteur se propose de démontrer l'importance des gisements ferrugineux des grèves de Necochea, ainsi que la possibilité d'en faire une exploitation industrielle dans un avenir pas trop lointain. Il présente une étude macroscopique et microscopique de ces sables, où l'on trouve de la magnétite, de l'ilménite, du sable ferrugineux, de grains moyen et gros, dans des proportions de 29.22; 24.76; 27.89 et 18.13 pour cent, respectivement. Il expose une étude et une discussion des méthodes de séparation et de détermination quantitatives, relatives à la question. Vient ensuite une étude comparative entre la composition des sables de Necochea et de d'autres gisements similaires américains ; puis une étude des produits sidérurgiques obtenus avec les sables ferrugineux de Necochea; et, finalement, la démonstration de la possibilité de l'exploitation.

En parcourant les grèves de Necochea, l'attention de l'observateur est vite attirée par l'abondance d'un sable noir, fin, partie brillant, partie mat, qui se rencontre, soit mélangé avec du sable ordinaire, soit séparé de ce dernier et constituant de petites dunes noires qui se déplacent au grè des vents. Au moyen d'un aimant quelconque, on peut isoler cette poudre noire, qui prend, alors, l'aspect d'un corps homogène, de propriétés uniformes.

L'examen microscopique direct de la partie attirée par l'aimant, fait voir une abondante quantité de magnétite, un peu de'ilménite ainsi que de petites quantités de hornblende et de picrotanite mélangées avec quelques grains de quartz. Ces éléments étrangers se rencontrent

(1) Étude presentée à l'Académie le 14 septembre 1926, l'auteur étant récipiendaire. (Version de l'espagnol par C. C. D.)

là, par un effet de traînage. Si l'on désire la magnétite plus pure, il faut interposer entre l'aimant et le sable, une lame de verre qui évite l'action mécanique retenante des impuretés; on sépare, ainsi, le minerai de fer accompagné de très peu de corps étrangers.

On trouve, dans le résidu non magnétique, des éléments très variés et des grains de différentes dimentions. Au moyen de tamis appropriés, on peut séparer trois types de sables divers : l'un d'eux est constitué par des gros grains de couleur jaune rougeâtre; un autre, par des grains moyens à couleur brune, et enfin un troisième par des grains fins à surface peu luisante.

Le sable à gros grains contient une abondante quantité de quartz, du plagioclase et de petites coquilles, un peu de grenat et de hornblende et très peu de magnétite et de'ilménite.

Le sable fin est composé, principalement, par de l'ilménite, de la magnétite et quelque peu de hornblende, sans compter des petites doses de picrotanite.

Le sable moyen est, par sa constitution chimique et ses propriétés, un intermédiaire entre les deux groupes antérieurs, ayant les mêmes éléments constitutifs disposés en quantités plus ou moins équivalentes.

Pour établir la proportion de ces éléments sous des conditions capables d'être considérées comme représentant un terme moyen convenable (vu l'hétérogénéité du produit) nous avons opéré sur dix kilogrammes. Voici les résultats obtenus :

1. Magnétite. Fer titanifère magnétique	29.22 %
2. Ilménite. Fer titanifère non magnétique	24.76
3. Sable moyen ferrugineux non magnétique ...	27.89
4. Sable gros moyen	18.13

Chacune de ces portions a été soumise à une analyse chimique afin d'établir ses éléments constitutifs, et de calculer ainsi, la véritable composition de l'ensemble avec une plus grande chance d'exactitude, vu la difficulté d'obtenir un échantillon suffisamment uniforme pour être considéré comme un terme moyen de ces sables ferrugineux. Au surplus, si l'on doit envisager du point de vue industriel le problème de l'exploitation de ces gisements, il convient de connaître la composition chimique exacte de chacune de ces portions ainsi capables d'être séparées par des moyens mécaniques faciles; ces portions ayant des natures variées, exigeront industriellement des opérations electromagnétiques diverses.

1. MÉTHODES D'ANALYSE

Avant d'exposer les résultats obtenus par l'analyse chimique des parties séparées mécaniquement, de la façon indiquée plus haut, il nous semble bon de faire un exposé sommaire des méthodes diverses que nous avons dû essayer avant d'obtenir, dans le cas présent, des chiffres concordants en tant qu'expressions des valeurs trouvées dans les opérations analytiques, ainsi que des données acceptables, lesquelles, affermies par des conceptions théoriques fondamentales, puissent offrir une garantie suffisante d'exactitude.

Nous avons donné une plus grande étendue à l'étude des méthodes d'attaque et de disgrégation des minerais à analyser, ainsi qu'à la détermination quantitative du titane, car ce sont les points qui présentent plus de difficulté, les autres évaluations réalisées se reduisant à la resolution des problèmes ordinaires de l'analyse minérale.

Disgrégation du minerai. — La méthode de Grandjean (1), qui consiste à fondre le minerai avec de l'hydrate de soude et à attaquer ensuite la partie insoluble par une suffisante quantité d'acide chlorhydrique qui dissout les oxydes de fer, de manganèse, de titane, de calcium et de magnésium, ne nous a pas donné tout le résultat favorable que nous espérions, car la dissolution des oxydes cités au moyen de l'acide chlorhydrique est incomplète; sans doute, dans le cas des sables en question, la présence du titane modifie la réaction.

Dans l'action couramment practiquée au moyen de l'acide chlorhydrique nous avons :

$$Fe^2O^3 + 6HCl \text{ (solution)} = 2FeCl^3 \text{ (dissout)} + 3H^2O \text{ (liquide)} + 31{,}3 \text{ calories.}$$

$$Fe^3O^4 + 8HCl \text{ (solution)} = FeCl^2 + 2FeCl^3 \text{ (dissouts)} + 4H^2O + 46{,}5 \text{ calories.}$$

Par conséquent, les minerais oxydés de fer, devraient être de facile attaque par les solutions concentrées de l'acide chlorhydrique, sous la forme ordinairement établie en chimie analytique.

Cependant, soit qu'il existe une polymération exothermique du sesquioxyde de fer, soit qu'il existe des structures moléculaires spéciales — comme l'a établi Nicolardot — ces réactions ne se produisent

(1) Ch. Grandjean, *Analyse rapide du ferro-titane, Chimie et Industrie,* juillet, 1922.

pas dans de nombreux minerais communs, et l'attaque est fréquemment incomplète, elle est, même, très défectueuse dans les cas des ocres et des siennes préalablement calcinées.

F. Leteur (1) a trouvé que si l'on fait l'attaque par de l'acide chlorhydrique gazeux, on obtient un dégagement de chaleur beaucoup plus considérable; on peut ainsi obtenir la première réaction indiquée, soit, celle de l'acide chlorhydrique sur le sesquioxyde de fer, avec un dégagement de 137.5 calories au lieu de 31.3 calories; et la réaction du même acide sur l'oxyde salin de fer développerait, dans ces conditions, 184.9 calories au lieu de 46.5 calories.

C'est sur ce fait, que Leteur a basé sa méthode d'attaque des minerais de fer. Il recourt à l'action de l'acide chlorhydrique concentré dans des récipients étanches, de façon à ce que le gaz chlorhydrique actionne sous une pression élevée et à une température qui varie entre 70° et 100°.

En combinant la méthode de Ch. Grandjean avec celle de F. Leteur, nous avons pu attaquer complètement et sans difficulté notre minerai, et cela sans que la modification que comporte le procédé représente une altération quelconque de l'élégante méthode d'analyse des minerais de fer titanifères décrite par Grandjean, méthode qui permet une rapide séparation de la silice, de l'alumine, de la chaux, du fer, du manganèse, du titane et du magnesium.

Le minerai grillé, puis fondu dans un creuset d'argent avec 25 ou 30 fois son poids d'hydrate de soude pur, a été maintenu en fusion calme pendant 50 minutes. Une fois la masse refroidie, puis traitée avec de l'eau et bouillie pendant dix minutes, puis filtrée, le précipité a été lavé avec de l'eau bouillante alcalinisée par de l'hydrate ou du carbonate de soude.

Au moment de l'attaque directe du résidu par l'acide chlorhydrique suivant l'indication de Grandjean, nous avons observé que, en effet, une grande partie du minerai avait été désagrégée par l'hydrate de soude, en produisant une abondante quantité d'oxydes métalliques aisément solubles dans l'acide chlorhydrique; mais une grande partie de l'oxyde de magnésium, à cause du titane très certainement, n'avait pas été attaquée, ce qui empêchait de suivre la méthode.

Cette partie insoluble, après filtration, lavage et séchage fut rapidement grillée de façon à détruire le papier du filtrage; puis attaquée

(1) F. Leteur, *Sur l'attaque des minerais de fer,* Communication faite à la Société des Chimistes français le 27 octobre 1920.

par une dissolution d'acide chlorhydrique a 22° Bé. saturée de gaz chlorhydrique, dans un vase de verre à parois résistantes et couvercle polie à l'émeri suivant les précautions établies par F. Leteur dans le livre cité plus haut, de façon à éviter l'échappement du gaz chlorhydrique libre ou du chlore dégagé par la réaction. Le flacon, placé dans un bain-marie, fut maintenu a 80° pendant une demi heure, après quoi on obtint une attaque parfaite qui permit de continuer l'analyse en suivant le restant de la marche établie par Grandjean.

L'on obtient ainsi, dissout, comme produit de la fusion avec l'hydrate alcalin, tout le silicate et l'aluminate de sodium. Il faut, dans ces derniers, rendre insoluble la silice et précipiter ensuite l'hydrate d'aluminium par l'amoniaque, comme cela se pratique habituellement.

Le solution des oxydes, obtenue par la méthode d'attaque de Leteur, permet de précipiter l'acide métatitanique en se basant sur la propriété qu'ont les sels de ce dernier, quant ils sont maintenus dans un milieu neutre, de rendre insoluble, par l'ébullition, l'acide mentionné (1) :

$$TiCl^4 + 3H^2O = 4H \,.\, Cl + H^2TiO^3$$

$$H^2TiO^3 + \text{chaleur} = H^2O + TiO^2.$$

On pèse ensuite l'anhydride titanique; on sépare, après cela, l'oxyde de fer et le bioxyde de manganèse et on finit par précipiter les oxydes de calcium et de magnésium.

Nous avons également essayé d'attaquer les sables par l'acide sulfurique concentré, dans des tuyaux à parois résistantes, fermés et maintenus a 180° dans un bain de paraffine (2). Au bout de douze heures, la désagrégation complète du minerai ne s'était pas produite; et même après 24 heures, toujours à la température indiquée, une partie du matériel continuait sans être attaquée. Du reste, en essayant de dissoudre le liquide, il se produisait aussi une quantité appréciable d'acide métatitanique insoluble.

Nous avons, conséquemment, abandonné ce procédé.

La méthode conseillée par Ad. Carnot (3) pour attaquer les sables monazités ou cériques, consiste à former d'abord une pâte avec le minerai porphyrisé et de l'acide sulfurique monohydraté; cette

(1) Eugène Saz, *Análisis Químico Mineral*, page 639, Barcelone, 1924.

(2) E. Barral, *Analyse Chimique Quantitative*, page 620, Paris, 1905.

(3) Ad. Carnot, *Analyse des Substances Minérales*, volume III, page 349, Paris, 1898.

pâte est suavement chauffée jusqu'à enlever l'excès d'acide, puis diluée une fois refroidie dans de l'eau glacée en abondance, ensuite filtrée, modérément calcinée et le residu fondu avec cinq parties de bisulfate de sodium, dans un creuset de platine. Cette méthode disons nous, donne de bons résultats, mais ceux-ci résultent encore meilleurs si l'on pratique les modifications proposées par P. Wenger et P. Christin (1) : on chauffe pendant, cinq heures a 230° l'acide sulfurique mélangé avec le minerai porphyrisé, on jette ensuite la pâte, par petites portions, dans de l'eau glacée; puis, après un traitement avec de l'acide fluorhydrique pour volatiliser la silice, on fond, finalement, le résidu, avec du carbonate de sodium. S'il restait encore quelque partie non attaquée, il faudrait de nouveau la fondre avec du sulfate acide de potassium.

La méthode de Jannasch (2), qui a recours à l'attaque par l'acide chlorhydrique dilué à la proportion de 4 $\times$ 1 dans des tubes fermés et à la température de 400°, n'offre, malgrè les difficultés de son application, aucun avantage appréciable sur le procédé plus simple proposé par Leteur.

L'emploi de l'anhydride borique, recommandé par Jannasch et Heidenreich (3), ne nous semble pas non plus recommandable pour le cas des sables ferrugineux soumis à l'analyse.

La méthode indiquée par R. Metzner (4), citée aussi par Meurice (5), et qui consiste à réduire le fer titanifère par l'hydrogène dans un tube de combustion maintenu au rouge, nous est resultée longue, difficile à pratiquer et peu avantageuse. Car, comme le fait observer Carnot (6), l'hydrogène pur et sec, réduit totalement, au rouge, les oxydes ferreux et ferriques mélangés ou combinés; mais il le fait très incomplètement quand ces oxydes forment des composés avec l'acide titanique. Metzner conseille un traitement de deux heures avec l'hydrogène, afin d'ob-

(1) P. Wenger et P. Christin, *À propos de l'attaque et de l'analyse de la monazite. Annales de Chimie Analytique,* page 231, 1922.

(2) W. F. Hillebrand, *The Analysis of Silicate and Carbonate Rocks,* page 85, 1910.

(3) Jannasch & Heidenreich, *Attaque des Silicates par l'anhydride borique. Zeitschr. Anorg. Chimie,* volume XII, pages 208, 1896. Hillebrand, *loc. cit.,* page 86.

(4) M. R. Metzner, *Analyse du Fer titane,* page 255.

(5) Albert Meurice, *Cours d'Analyse des Matières Minérales,* page 209, Paris, 1908.

(6) Ad. Carnot, *Analyse des Substances minérales. Analyse de l'Ilménite,* volume III, page 606, Paris 1898.

tenir la réduction complète. Nous avons prolongé jusqu'à douze heures l'action de l'hydrogène sur le minerai parfaitement porphyrisé et placé dans un tube de combustion maintenu à une température supérieure au rouge sombre, sans pouvoir obtenir l'élimination complète du fer réduit quant on traite ensuite le produit de l'opération, par l'acide chlorhydrique, comme il est indiqué dans le procédé. En revanche, la solution chlorhydrique obtenue contenait toujours des portions de chlorure de titane bien caractérisés par la réaction avec l'eau oxygénée.

Nous nous sommes ensuite proposé d'étudier la méthode de O. Quadrat et Fr. Karas (1) qui consiste a fondre le minerai dans un creuset de porcelaine avec un mélange de carbonate et d'oxalate de sodium. Quoique cette méthode n'a pas été indiquée par les auteurs comme applicable aux fers titanifères en général, mais bien seulement pour les fers difficilement attaquables, tels que les hématites oolithiques provenantes du terrain silurique de Bohême, on pourrait, cependant, croire possible l'emploi d'un procédé si commode (sa facilité d'éxecution permettant l'emploi d'un creuset de porcelaine, lequel évite les inconvénients des fusions qui se produisent dans les appareils en platine où l'on constate toujours une perte du métal précieux). Malheureusement, les résultats obtenus n'ont pas été satisfaisants, du moins autant que nous l'espérions.

Quand il s'agit de minerais oxydés de fer titanique, nous n'hesitons pas à indiquer notre préference pour la disgrégation par le bisulfate d'ammonium qui permet de différentier l'anatase, le rutile et la brookite des autres minerais titanifères, ou par le bisulfate de potassium qui desagrège parfaitement à tous ces derniers et qui peut s'employer avec d'aussi bons résultats dans le traitement de l'ilménite et des fers titanifères en général.

Ce réactif permet de faire actuer l'ion sulfurique à une température beaucoup plus grande que celle que l'on obtiendrait par l'action directe de l'acide sulfurique, même dans des vases fermés, et on obtient par son intermédiaire la solution de tous les oxydes métalliques, moins le quartz, la silice combinée et les polisilicates.

Pour obtenir un bon résultat il est indispensable, étant réunie une quantité de minerai, d'employer au moins, dix-huit fois son poids de réactif; il faut opérer dans une grande capsule de platine : fondre

(1) O. Quadrat et Fr. Karas, *Chem. Listy*, pages 195 a 199, 1921. *Chimie & Industrie*, mars 1922.

préalablement le bisulfate de potassium, retirer le feu, refroidir le fondant et incorporer le minerai parfaitement porphyrisé. Il faudra fondre la masse lentement, la maintenir ainsi pendant une heure, en réglant le feu de manière à empêcher l'élévation excessive de la température et éviter le formation de l'acide métatitanique très peu soluble, même dans les liquides acides.

V. L. Chandatrera (1), Paul Wenger et Jules Morel (2) ainsi que Friederic (3), conseillent également, tant pour le cas de l'ilménite que pour celui de l'analyse de la titatine, l'emploi du sulfate acide de potassium dans des quantités qui varient entre 14 et 18 fois les poids de la substance soumise à l'analyse.

Albert Meurice (4) cite un travail paru dans le *Journal of the Society of Chemical Industry,* selon quoi, on éliminerait la silice d'un minerai ferro-titanifère, en le fondant avec du fluorure de sodium et du sulfate acide de potassium.

G. Chesnau (5) propose de désagréger, d'un demi à un gramme, le minerai finement porphyrisé, avec 5 à 10 grammes de carbonate double de sodium et potassium, en chauffant jusqu'à fusion tranquille; puis de faire un traitement par l'acide sulfurique dilué, lequel rend insoluble la silice et sépare à l'état de sulfates, le titane, le fer, l'aluminium et les métaux alcalino-terreux.

Dans le cas du minerai qui nous occupe, les sables gros et moyens, furent bien désagrégés par cette méthode, mais point la magnétite, ni le minerai titanifère non magnétique qui resistèrent à la fusion, ainsi qu'au traitement ultérieur par l'acide sulfurique.

Les travaux de Wunder et Wenger (6); ceux de P. Wenger et J. Wuhrmann (7), de Michel Bordato (8), de même que de H. H. Sulli-

(1) V. L. Chandatrera, *Volumetric determination of Titanium. Chemical News,* pages 231, 232, 1922.

(2) Paul Wenger et Jules Morel, *Séparation de la Silice, l'Étain, le Titane et le Zircone par le carbonate de soude. Annales de chimie analytique,* page 139, mai 1921.

(3) Friederic, *Analyse de la Titanite,* page 399.

(4) Albert Meurice, *Séparation du Titane. The Journal of the Society of Chem. industry,* 1900. *Cours d'Analyse Chimique,* page 211, 1908.

(5) G. Chesnau, *Principes théoriques et pratiques d'Analyse Minérale,* page 310, Paris, 1912.

(6) Wunder et Wenger, *Séparation de* SiO^3, SnO^2, TiO^3, ZrO^3, *par le* Na^2CO^3. *Ann. de Chimie Analytique,* page 363, 1912.

(7) M. Bordato, *Dosage du Fer et du Titane. Thèse,* page 25.

(8) P. Wenger et J. Wuhrmann, *Séparation du* Fe, Al, Cr, Sl, Ti *et* Zr *par la méthode au carbonate de sodium. Ann. Chimie Analytique,* page 337, novembre, 1919.

mann (1) préconisent la fusion directe du fer titanifère porphyrisé, avec du carbonate de sodium anhydre dans un creuset de platine, ainsi que le traitement ultérieur avec de l'eau distillée, de façon à dissoudre les oxydes, sauf ceux de fer et de titane. Arnold, conseille de désagréger avec du carbonate de sodium d'un poids trois à huit fois supérieur à celui du minerai soumis au traitement, mais il termine l'opération en ajoutant 0.5 de phosphate d'ammonium, suivi d'une évaporation jusqu'à séchage. Il maintient ensuite le résidu à une température voisine de 100° à 110° et il traite par l'acide chlorhydrique dilué de façon à dissoudre tous les oxydes moins celui de fer qui reste insoluble à l'état de phosphotitanate ferrique melangé avec la silice. Une nouvelle fusion avec dix parties de carbonate de potassium, sépare l'acide phosphorique à l'état de phosphate soluble et laisse insolu le titanate acide de potassium avec le sesquioxyde de fer. Une troisième fusion avec du bisulfate de potassium, permet enfin de dissoudre l'acide titanique.

Nous avons préféré la désagrégation avec le mélange equimoléculaire de carbonate de sodium et de potassium, pour l'analyse du sable gros obtenu après l'élimination par des moyens physiques, de la majeure partie des oxydes férriques et titaniques. Le sable moyen a été traité avec succès par la méthode de Chesnau.

Dans tous les cas il faut déterminer, dans le residu insoluble qui s'obtient après la désagrégation, la quantité de silice pure, ce qui se fait par la volatilisation — après le traitement par les acides fluorhydrique et sulfurique, comme d'habitude. Une fois ce résidu non volatile pesé — résidu qui servira au calcul par différence de la quantité de silice — on le desagrège à nouveau avec du bisulfate de potassium ; l'on peut, soit volumétriquement, soit colorimétriquement, déterminer le titane qui aurait pu rester dans le dit, de façon à l'ajouter à la quantité totale obtenue par l'analyse du liquide qui contient tous les principes insolubles. Dans le cas des sables ferrugineux de Necochea, le résidu insoluble non volatilisé par le traitement avec l'acide fluorhydrique, est toujours très petit et on pourrait le considérer comme étant entièrement constitué par l'anhydride titanique.

Détermination du titane. — Nous avons tâché d'aborder l'étude de la détermination quantitative du titane et celui de sa séparation du fer, de l'alumine et des manganèse existants dans les sables ferrugi-

(1) H. H. Sullimann, *Sur les Procédés d'Insolubilisation de la Silice et sa Solubilité dans les acides. Thèse,* Grenoble, 1914.

neux de Necochea, avec toute l'amplitude qu'exige cette intéressante question, et nous nous proposons d'expliquer brièvement les motifs qui nous ont induit à préférer quelques unes des méthodes entre celles qui intègrent la nombreuse collection d'articles publiés et que nous avons eu occasion de considérer.

Gravimétriquement, on tâche toujours de peser ce corps à l'état d'anhydride titanique (TiO^2) en l'obtenant généralement par la calcination de l'acide métatitanique, corps stable, très peu soluble, même dans des solutions faiblement acides, et qui peut s'obtenir aisément par hydrolise, de manière à être separé au moyen d'un papier à filtrer; il suffit pour cela, d'avoir la précaution d'utiliser des solutions étendues de chlorure d'ammonium quant on termine le lavage du précipité, de façon a éviter la formation de composés colloidaux (1).

Comme l'acide métatitanique devient moins soluble au fur et à mesure que l'acidité du milieu diminue, il est indispensable d'opérer dans des liquides presque neutres et d'avoir recours, également, à l'acétate de soude, de façon à remplacer par l'acide acétique toute l'acidité minérale qui pourrait y rester.

Pour que les résultats de cette méthode soients satisfaisants — surtout en présence de l'aluminium — il conviendra de consulter le travail de W. Böttger (2) qui a étudié l'hydrolise du sulfate de titane à 25°, 50° et 100°, ainsi que les valeurs de PH dans lesquels la précipitation du titane est complète, l'aluminium restant dissous.

La présence du fer et du manganèse ne gêne pas l'opération si l'on prend garde d'utiliser préalablement des réducteurs qui empêchent la précipitation des hydrates insolubles. Pour le cas, on a recours, soit à l'acide sulfureux, à l'acide sulrhydrique ou à l'hyposulfite de sodium.

En neutralisant ainsi complètement le liquide par l'ammoniaque, puis en ajoutant 50 a 60 centimètres cubiques de solution saturée d'acide sulfureux, on obtient, après une ébullition d'une durée d'à peu près deux heures, tout en rétablissant, si besoin est, l'eau et l'acide sulfureux consommés, une totale séparation de l'acide métatitanique qui, très blanc, se dépose en entier au bout 24 heures; ont peut alors filtrér sans inconvénients. La calcination de ce corps donne un résidu

(1) L. L. de Koninck, *Traité de Chimie Analytique Minérale*, page 341, Paris, 1911.

(2) W. Böttger, *L'Hydrolise de sulfate de titane, utilisée pour la séparation de* Al *et* Ti. *Annales de Chimie Analytique*, page 78, mars 1924. *Chem. Ztg.*, page 781, 1923.

d'anhydride titanique qui, étant pur, résultera également très blanc.

L'emploi de l'acide sulfhydrique, reccommandé par Metzner *(loc. cit.)*, suivi d'une saturation progressive de l'acide libre par l'ammoniaque, fait précipiter, d'abord, tout le titane et le fer ainsi que le manganèse, s'il y en a; puis dissoudre, par ébullition prolongée, les sulfures de ces deux derniers corps laissant insoluble l'acide metatitanique. Ce procédé ne nous est pas résulté très pratique. Car bien que l'acide sulfhydrique, dans un milieu alcalin, de même que le sulfure d'ammonium ont, en effet, une préférence marquée vers la précipitation de l'acide ortotitanique [$Ti(OH^4)$] gélatineux blanc, il est cependant très lent à filtrer et a une tendance à retenir des composés de fer et de manganèse très difficiles à séparer. Dans ces conditions, l'opération est moins avantageuse que celle relative à la séparation de l'acide métatitanique si aisément filtrable.

L'emploi de l'hyposulfite de sodium comme réducteur exige, dans le cas des sables de Necochea, de ne pas négliger la présence de l'aluminium qui précipite conjointement avec l'acide métatitanique et exige, par conséquent, son ultérieure séparation.

Hormis ce détail qui n'offre aucune difficulté, la méthode résulte rapide, la précipitation est complète et l'on obtient, finalement, un anhydride titanique très pur. Si l'on opère avec des solutions qui aient un excès d'acidité, alors un dégagement abondant d'anhydride sulfureux a lieu, accompagné d'un précipité de soufre amorphe. Ce fait ne modifie pas les résultats finals, mais il rend quelque fois difficile la bonne marche de la filtration.

Le précipité d'acide métatitanique est facilement obtenu au moyen d'acétates alcalins, et sa filtration est rapide et bonne, mais il a l'inconvénient de fournir un anhydride titanique qui n'est pas parfaitement blanc, étant toujours accompagné de composés de fer.

Kling et les époux Lassieur ont établi, dans un travail présenté à l'Académie des Sciences, l'an 1924 (1), que l'aluminium précipite sous forme d'acétate basique, quand le PH atteint à 4.5, le fer commence à précipiter si le liquide a du PH au taux de 3.7. Ils ont démontré aussi que, même avec du PH au taux de 8.6 dans un liquide entièrement alcalin, on peut obtenir la séparation de l'aluminium, dans lequel cas on obtient un précipité gélatineux et presque impossible de filtrer.

(1) A. Kling et M. et Mme A. Lassieur, *Séparation de* Al, Fe, *d'avec* Zn, Mn *et* Ni *par la méthode aux acétates. Académie des Sciences* le 5 mai 1924. *Annales de Chimie Analytique,* page 225, le 15 août 1924.

En surveillant la concentration des ions hydrogène on peut, par conséquent, perfectionner le procédé jusqu'à obtenir, par les acétates alcalins, la séparation de l'acide titanique dans des conditions acceptables de pureté et de rapidité.

Une méthode gravimétrique, un peu longue mais d'exécution aisée et qui nous a donné de fort bons résultats, est celle de Gooch modifiée par T. M. Chatard (1); elle est basée sur l'action de l'acide sulfhydrique sur un liquide contenant une quantité d'acide tartrique au moins égale à trois fois le poids des oxydes de fer et de titane dissouts. En alcalinisant ensuite au moyen de l'ammoniaque et en faisant passer un nouveau courant d'acide sulfhydrique, on sépare le fer à l'état de sulfure. Le restant d'acide tartrique est détruit par du permanganate de potassium dans un liquide bouillant et bien acidulé avec de l'acide sulfurique. S'il reste un excédant de sel, on le détruit avec du sulfite d'ammonium, en laissant ainsi une solution acide qu'on peut neutraliser avec de l'ammoniaque de façon à précipiter l'acide métatitanique par l'hydrolise, en présence de l'acétate de sodium. On fond ensuite avec du carbonate sodique le précipité obtenu, rendant ainsi soluble, à l'état d'aluminate alcalin, tout l'aluminium qui pourrait être resté à l'état de phosphate; dans cette opération, l'ion phosphorique passe aussi à l'état de phosphate alcalin soluble. En neutralisant ensuite le liquide avec de l'acide acétique, on ajoute un excès d'eau et l'on fait bouillir pendant deux heures de façon à séparer l'acide titanique dans d'excellentes conditions de pureté. La seule indication contraire à la méthode, correspondrait au cas où il y aurait du zircone; il faudrait alors faire la séparation de James Brown et H. T. Madden (2) qui utilisent les phosphates.

Le procédé de Clowes et Colemann (3) emploie aussi comme réducteur l'hyposulfite de sodium; l'acide métatitanique et l'hydrate d'aluminium précipitent ensemble au moyen du phosphate acide de sodium dans une liqueur acétique. Une fusion avec des carbonates et de l'hydrate de sodium, séparera, comme dans le cas précédent, l'aluminate alcalin, ce qui permet de peser l'acide titanique insoluble.

(1) *Méthode Gravimétrique de Gooch pour le Titane,* modifiée par T. M. Chatard, *Chemical News,* page 26, 1891.

(2) James Brown et H. T. Madden, *Séparation de* Zr *et* Ti *au moyen des phosphates. Journal of the American Chemical Society,* 1919. *Moniteur Scientifique,* avril 1920.

(3) Clowes and Coleman, *Chimie Analytique. Séparation de l'aluminium et du titane,* page 264.

À titre d'information, nous citerons la méthode de W. M. Thornton (1) qui, en employant le cupferon (nitrosophenilhydroxilamine), précipite le Ti $(NONC^6HO^5)^4$. Ce procédé a été, quelques années après, vérifié par Thornton et Chapman (2) comme étant satisfaisant. Nous n'avons pas eu occasion de l'essayer.

Méthodes volumétriques. — Les propriétés réductrices des sels de titane, et très spécialement des chlorures, sont si utiles, qu'elles ont donné lieu à une nouvelle méthode volumétrique qui, sous le nom de « Titanométrie », a été décrite par le distingué professeur P. Eugène Saz, dans son récent et si intéressant *Traité d'Analyse Chimique Minerale Quantitative* (3) et qui se trouve avec tous ses détails étudiée dans l'important et très complet *Traité d'Analyse par réduction,* de E. Knecht et E. Hibbert (4).

Ce sont ces mêmes propriétés que l'on utilise lorsque l'ont veut déterminer le titane par volumétrie.

Quoique ces méthodes volumétriques de la détermination quantitative du titane sont certainement très nombreuses, elles sont toutes fondées sur la facilité d'obtenir cet élément à l'état de sels titaneuses susceptibles d'être ensuite déterminées par oxydation.

En comparant la ressemblance de ces réactions, les méthodes volumétriques du titane peuvent se classifier en trois groupes, selon que l'on ait recours à l'oxydation par le permanganate de potassium, ou à l'action de sels ferriques sur l'oxyde titaneux, ou au bleu de méthylène, dans une solution titrée empirique.

Mais, où ces procédés diffèrent principalement, c'est dans le choix des réducteurs à employer au commencement de l'analyse, quelle que soit la réaction finale choisie pour effectuer l'évaluation.

Il convient toujours de prendre soin d'éviter l'action oxydante de l'air sur les sels titaneuses; ceci indique la nécessité de préparer les titrages dans une atmosphère d'anhydride carbonique ou de nitrogène.

Un des réducteurs le plus ordinairement employé, est le zinc.

(1) W. M. Thornton, *Précipitation du Titane par le cupferon. Journal American Society,* page 173, 1914.

(2) Thornton and Chapman, *Détermination du Titane par le cupferon. Journal of the American Chemical Society,* page 91, 1921.

(3) P. Eugène Saz, S. J. *Análisis Quimico Mineral cuantitativo,* page 262, Barcelone, 1926.

(4) E. Knecht and E. Hibbert, *New Reduction Méthods in Volumetric Analysis,* Londres, 1925.

Gallo (1) assure que les sels titaniques peuvent se réduire au bout de cinq heures par l'action continue de l'hydrogène naissant; mais il ajoute que s'il y a des sels ferriques dans le liquide, la réduction n'est totale qu'au bout de douze heures. En employant une solution au cinq par mille du produit que l'on obtient par le désagrégation des sables de Necochea, et en employant de la limaille de zinc en solution acide, la réduction était encore incomplète au bout de 24 heures. En employant un cilindre de zinc suspendu par un fil de platine et plongé dans le liquide acide, nous avons obtenu la complète réduction au bout de quatre heures.

M. et Mme Shimer (2) ont abrégé considérablement le temps de la réduction moyennant un tube de Jones de 36″ de longuer et 3/4″ de diamètre plein de zinc amalgamé, en grenaille. L'amalgame de zinc a été également recommandé par Lundell et Knowles (3); ces derniers ont obtenu d'excellents résultats, soit en employant le tube de Jones, soit un autre quelconque appareil de réduction et en opérant à une température qui peut varier de 25° à 100°.

Le tube réducteur de C. Van Brunt (4) a l'avantage de pouvoir être chauffé électriquement au moyen d'une résistance métallique, ce qui permet d'abréger, encore plus, le temps de réduction, en employant l'hydrogène naissant.

V. L. Chandatrera (5) qui déterminait le titane dans une bauxite impure, eut l'idée d'employer du chlorure stanneux produit directement dans le liquide où l'on doit faire la réduction. Pour cela, il fit actuer de l'étain métallique sur du chlorure d'ammonium en solution chaude et fortement chlorhydrique. L'excès de chlorure stanneux s'élimine comme d'habitude au moyen d'une solution de quarante par mille de chlorure mercurique. Le résultat est très satisfaisant.

(1) G. Gallo, *Determinazione Volumetrica del Titanio. Atti Accad. Lincei, rend.*, page 325, 1917.

(2) P. W. Shimer and E. R. Shimer, *The Volumetric Determination of Titanium. Internat. Congr. Appl. Chem. Report,* page 445, 1912.

(3) G. E. S. Lundel et H. B. Knowles, *Détermination du Titane par oximétrie avec* $KMnO^4$ *et réduction préalable par le* Zn. *Amer. Chem. Soc. Journal,* pages 2620 à 2623, 1923. *Chimie et Industrie,* août 1924.

(4) C. Van Brunt, *The Volumetric Determination of Titanium and Chromiun by means of a modified reductor,* J. A. C. S., page 1426, 1914. *Journal of the Americans Chemical Society.*

(5) V. L. Chandatrera, *Détermination Volumétrique de* TiO^2 *dans la bauxite: Chimie & Industrie,* novembre 1922.

Joseph Barnes (1) a employé, pendant plusieurs années, des balles de plomb comme agent réducteur pour le titane, avec un résultat également satisfaisant.

Le cadmium électrolytique, vanté par W. D. Treadwell dans trois mémoires publiés par *Helvetia Chimica Acta* (2), remplace avantageusement le zinc dans la réduction des oxydes titaniques, même à l'état de sulfates. Au moyen d'un agencement convenable, l'auteur a pu obtenir, en deux minutes, la totale réduction du sulfate titanique en présence du sulfate ferrique.

Parmi les alliáges réducteurs, on peut recommander celle du zinc avec du magnésium, qui doit être employé dans un milieu chlorhydrique d'après les indications de Hinrichsen (3). A. Genmell (4) emploie avec de bons résultats un alliage formé de 90 parties de zinc et dix d'aluminium.

L'aluminium métallique, soit en feuilles comme le recommandent A. M. Morley et J. K. Wood (5), soit en poudre — forme sous laquelle nous l'avons également essayé — employé à froid et dans un liquide chlorhydrique, réduit le fer seulement, laissant intacts les sels titaniques, ce qui donne lieu à une élégante méthode volumétrique de séparation de ces deux métaux. Si on l'emploi à chaud, comme le conseille J. K. Wood à fin d'obtenir ce qu'il apelle « méthode exacte et rapide de déterminatiou du titane » (6) on peut arriver a des résultats acceptables, avec une marge d'erreur qui se maintient à un pour cent environ.

Nous avons noté deux inconvénients à ces méthodes, savoir : d'abord et principalement, qu'il est très difficile de trouver de l'aluminium entièrement exempt de fer; l'autre résulte de la lenteur de la réduction des sels ferriques; il y a des cas où, même 24 heures, n'ont pas été suffisantes pour les enlever complètement d'une solution contenant un léger excès d'acide sulfurique.

(1) Joseph Barnes, *Nouveau Réducteur pour le Titane* (communication privée). *Volumetric Analysis*, by E. Knecht and E. Hibbert, page 12, 1925.

(2) W. D. Treadwell, *Emploi du* Cd *au lieu de* Zn *pour déterminer volumétriquement le* Ti. *Helvetia Chimica Acta*, page 551, 1921; pages 722 à 806, 1922.

(3) Hinrichsen, *Nouveau Réducteur pour le Titane. Chemiker Zeitung*, page 189, 1917.

(4) A. Gemmell, *Determination of Titanium. The Analyst*, page 198, 1910.

(5) A. M. Morley and J. K. Wood, *The Volumetric Estimation of Titanium. Journal of the Chemical Society Transactions*, page 518, 1924.

(6) J. K. Wood, *Dosage Volumétrique du Titane. Journal Chim. Soc.*, page 548, 1924; *Chimie & Industrie*, octobre 1924.

Comme bon réducteur de sels ferriques sans modifier les titaniques, nous pouvons indiquer l'acide sulfhydrique dans un milieu acide. Wells et Mitchell (1) l'emploient avantageusement pour déterminer exclusivement les sels ferriques en présence du titane. Il faut alors avoir recours au zinc si l'on veut obtenir la réduction totale des composés des deux métaux, et calculer ensuite, par différence, la quantité de sels titaniques.

Une fois la réduction des sels, titanique et ferrique obtenue, les méthodes volumétriques peuvent — comme nous avons eu déjà lieu d'exprimer — se classifier en trois groupes.

On a recours, quelques fois, à l'oxydation par le permanganate de potassium d'après les indications de Lundell et Knowles (2) ou à celles de Well et Mitchell (3); et même, moyennant l'habile emploi de réducteurs combinés, on peut obtenir la détermination totale du fer et du titane suivie d'une autre, partielle, pour les sels ferriques; d'où résulte, par différence, celle du titane.

D'autres fois on utilise les propriétés réductrices des sels titaneuses, ce qui a donné lieu à une intéressante variété de procédés modernes (4) qui terminent l'évaluation par l'emploi d'un sel ferrique. C'est ainsi que J. K. Wood *(op. cit.)*, ajoute à la liqueur que contienent les sels ferreuses et titaneuses obtenues par la réduction au moyen de l'aluminium à chaud, une solution titrée d'alun ferrique, en employant le sulfocyanate de potassium, comme réactif indicateur interne qui annonce le moment ou tout le sel titaneux, étant saturé, il reste seulement l'alun ferrique en solution, sans être réduit.

Dans de semblables conditions, Hinrichsen (5) titre les composés titaneux par les sels ferriques, et V. L. Chandatrera *(loc. cit.)*, faisant

(1) Well et Mitchell, *Séparation Volumétrique du Titane et du Fer. Annales de Chimie Analytique*, page 58, 1896.

(2) *Op. cit.*

(3) *Op. cit.*

(4) E. Necht and E. Hibbert, *Valumetric Analysis*, page 101, New York, 1925; L. Brandt, *Détermination Volumétrique du Fer par le Trichlorure de titane. (Chem. Ztg.*, pages 255-270. *Annales de Chimie Analytique*, page 281, sept. 15, 1924); T. R. Ball and Georges Mc. Phail Smith, *The Volumetric Estimation of Titanium by means of Ferric chloride. Journal of American Chemical Society*, page 1838, 1914; Eva Hibbert, *A Volumetric Method for the Estimation of Copper and Chromium and of Copper, Chromium an Iron in admixture. (Journal of the Society of Chemical Industry*, page 190, 1909.)

(5) F. W. Hinrichsen, *Ueber die Mansanalytische Bestimmung von Titan. (Chem. Ztg.*, page 738, 1907.)

une légère variante, au lieu de préciser l'instant où tout le sel titaneux a été saturé par le sel ferrique, ajoute un excès de chlorure ferrique valoré, de façon à contenir dix grammes de métal par litre, et il titre par retour, le chlorure ferreux produit, au moyen d'une solution au dixième normal de bichromate de potassium (Penny).

La méthode de Eva Hibbert (1) qui utilise le bleu de méthylène en solution titrée, a été éprouvée par B. Neumann et R. K. Murphy (2). avec des résultats qui la font recommandable, surtout, quand on a besoin de déterminer de petites portions de titane en présence d'une grande quantité de fer.

Cette méthode est fondée sur l'action des réducteurs sur le bleu de méthylène, jusqu'à détruire sa couleur :

$$C^{16}H^{18}N^3SCl + H^2 = C^{16}H^{20}N^3SCl.$$

Il résulte ainsi que 319.5 de bleu de méthylène équivalent à 112 de fer et a 160 d'anhydride titanique.

Nous avons avantageusement employé ces méthodes volumétriques, qui concordent avec les gravimétriques, recommandées plus haut.

La méthode colorimétrique de Weller (3) qui consiste à utiliser la réaction jaune intense que donnent les composés titaniques en présence d'eau oxigénée, ne nous a pas été utile pour analyser des sables ferrugineux, et cela, à cause de l'embarras originé par l'abondance de fer en solution, ce qui oblige à augmenter considérablement la quantité d'acide phosphorique qu'il faut ajouter suivant les indications de Dunnington (4) sans obtenir, même ainsi, des résultats satisfaisants.

La modification de J. H. Walton (5), qui consiste à fondre le minerai avec du bioxyde de sodium pour rendre insoluble le sesquioxyde ferrique, tout en laissant en solution le pertitanate de sodium, permet d'obtenir de meilleurs résultats quoique, à notre avis, sans arriver à

(1) Eva Hibbert, *A Volumetric Method for the Estimation of Titanium and Iron in the presence of each other. (Journal of Society of Chemical Industry,* page 189, 1909.)

(2) B. Neumann and R. K. Murphy, *Titanbestimmung durch Titration mit Methylenbau. (Z. F. ang. Chem.,* page 613, 1913.)

(3) A. Weller, *Dosage Colorimétrique du Titane, B. et B.,* page 25, 1882; F. P. Treadwell, *Analyses Quantitative,* page 94, Paris, 1912.

(4) F. P. Dunnington, *Méthode Colorimétrique pour déterminer le Titane. (Jour. of American Chemical Society,* page 210, 1891.)

(5) J. H. Walton, *Séparation du Fer et du Titane (Ch. Ztg. Rep.),* page 329, 1907.

être aussi constants que ceux obtenus par les méthodes gravimétriques, et même volumétriques, citées plus haut.

Détermination du fer et sa séparation de l'aluminium et du manganèse. — Il faut préalablement séparer de la liqueur résultante de la disgrégation par l'acide pirosulfurique — qui contienent les sulfates de fer, de manganèse, d'aluminium et de titane — tout ce dernier élément, ce qui, comme nous l'avons précédemment indiqué, s'obtient aisément par l'hydrolise de l'acide métatitanique dans un milieu neutre, avec excès d'anhydride sulfureux, de façon à réduire les sels ferriques.

La liqueur filtrée est divisée en trois parties : une de ces parties est réservée pour la précipitation du fer et de l'aluminium à l'état d'acétates, de façon à pouvoir déterminer, dans le liquide filtré, tout le manganèse à l'état de bioxyde d'après la méthode de C. Holthof (1) et les indications de A. Kling et de M. et Mme Lassieur *(loc. cit.)*. L'abondante quantité de sels des métaux alcalins qu'il a fallu ajouter au liquide, tant dans la désagrégation du minerai que dans la précipitation des acétates, et la tendance, signalée, de l'hydrate de péroxyde de manganèse à les retenir, rendent très difficile le lavage du précipité. Cela indique la convenance d'une analyse volumétrique qui vérifie la pureté de l'oxyde salin de manganèse (Mn^3O^4) pesé après la calcination de l'hydrate en question.

Une autre partie de la liqueur primitive, presque entièrement saturée d'ammoniaque, est reservée à la précipitation de l'aluminium suivant l'ancienne méthode de Chancel (2), on obtient ainsi un précipité d'hydrate d'aluminium presque entièrement libre de fer. Une nouvelle dissolution, suivie de précipitation, permet d'enlever tout le fer et le manganèse qui auraient pu rester à titre d'impuretés.

En filtrant, lavant et calcinant l'hydrate, on peut peser l'oxyde d'aluminium qui peut, éventuellement, contenir un peu d'acide titanique resté, comme défaut, de sa correspondante séparation. Afin de vérifier cette cause possible d'erreur et d'éviter les inconvénients, il faut redissoudre, par désagrégation, ce résidu, et déterminer colorimétriquement la quantité d'oxyde de titane résultant, laquelle devra être déduite de la quantité d'oxyde d'aluminium obtenu.

(1) C. Holthof, *Détermination du Manganèse par le Brome. (Zeitschr, f. Anal. Chimie,* page 491, 1884.)

(2) C. Chancel, *Précipitation de l'Aluminium par l'Hyposulfite de sodium. (Comptes Rendus,* XLVI, page 987, 24 mai 1858.)

Les acétates insolubles de fer et d'aluminium une fois calcinés et pesés à l'état d'oxydes, serviront à obtenir la quantité totale de sesquioxyde de fer une fois enlevé le chiffre qui correspond à l'aluminium trouvé.

La troisième partie sert a vérifier, par volumétrie, suivant Margueritte ou Penny, les quantités de fer et de manganèse obtenus par gravimétrie.

Détermination du magnésium. — Nous l'avons fait sur le produit de la désagrégation de deux grammes de minerai, en concentrant la liqueur résultante, après séparation du titane, du fer, de l'aluminium et du manganèse, à l'état d'oxydes, au moyen du chlorure d'ammonium, de l'ammoniaque et du brome.

Nous avons obtenu ainsi le phosphate d'ammonium et de magnésie, qui, par la calcination correspondante, permit de peser le pyrophosphate de magnésium, moyennant lequel on calcule la quantité d'oxyde, comme d'habitude.

Tant le minerai magnétique que l'ilménite, ne contiennent ni soufre, ni de phosphore, ni d'autres métaux communs; ils ne présentent que des traces de calcium. Les sables restants, après séparation des minerais ferrugineux oxydés, contiennent une plus grande quantité d'oxyde de calcium.

Détermination de l'oxygène. — Pour calculer le degré d'oxydation du fer, nous avons déterminé, volumétriquement, la quantité d'oxyde ferreux selon Carnot (1) et pratiqué ensuite l'évaluation de l'oxygène total en calcinant le minerai, bien porphyrisé, dans un fourneau de combustion où nous le maintînmes au rouge, dans un courant d'hydrogène parfaitement pur et sec, pendant cinq heures. L'eau engendrée par la réaction fut recueillie dans un tube contenant de l'anhydride phosphorique et, par la quantité obtenue, on a calculé la proportion d'oxygène total, suivant le procédé décrit par A. Ledebur (2).

Nota. — Dans tous les cas, les sables ferrugineux furent soumis avant l'analyse, à un lavage soigné, avec abondance d'eau distillée, de façon à enlever tous les corps solubles qui auraient pu rester à la surface des grains par l'évaporation de l'eau de mer.

Le chiffre de l'humidité représente l'eau hygroscopique retenue par

(1) Ad. Carnot, *Traité d'Analyse des Substances Minérales*, tome II, page 643, tome III, page 742, Paris, 1910.

(2) J. Post et B. Neumann (traduction L. Gautier), *Traité complèt d'Analyse chimique appliquée au Essais industriels*, tome I, page 670, Paris, 1909.

le sable lavé et convenablement seché, en le maintenant ensuite, avant l'analyse et pendant 48 heures, à l'air libre, dans les conditions normales du milieu ambiant.

En prétendant évaluer la perte par calcination, nous avons observé une augmentation constante de la pesée, augmentation qui s'accentuait au fur et à mesure que l'action du fer se prolongait. Ce phénomène est une conséquence de l'oxydation de l'oxyde salin de fer et sa transformation en sesquioxyde d'après l'équation chimique suivante :

$$4Fe^3O^4 + O^2 = 6Fe^2O^3.$$

Nous avons évité cet effet en plaçant le minerai dans une nacelle tarée et disposée, a son tour, dans un tube de combustion où circulait un gas inerte. La combustion ne produit pas, alors, une perte de poids appréciable.

2. COMPOSITION CHIMIQUE DES SABLES DE NECOCHEA

En suivant les procédés indiqués au chapitre précédent et en choisissant le résultats obtenus par les opérations analytiques qui présentaient des concordances dans les chiffres finals, de sorte à offrir des garanties d'exactitude, nous avons été portés à établir que la composition chimique des sables ferrugineux de Necochea se trouve être la suivante.

Magnétite. — Oxyde de fer magnétique : Partie séparée au moyen d'un aimant, en interposant une lame de verre entre ce dernier et le reste de sable qui compose l'échantillon :

Quantité obtenue	29.22 %
Densité	4.6908
Humidité a 100-105°	0.079
Oxyde salin de fer (Fe^3O^4)	76.599
Anhydride titanique (TiO^2)	15.940
Bioxyde de manganèse (MnO^2)	3.711
Oxyde d'aluminium (Al^2O^3)	1.186
Oxyde de calcium (CaO)	0.080
Oxyde de magnésium (MgO)	0.502
Anhydride silicique (SiO^2)	1.804
Non déterminé	0.099
Fer total	55.441

Ilménite. — Oxyde de fer titanifère non magnétique : Obtenu par des lévigations et des tamissages convenables, en tâchant de séparer le

plus possible, toutes les portions de quartz, de sable et de corps étrangers dont les grains peuvent être distingués a la loupe :

Quantité obtenue	24.76 °/₀
Densité	4.2785
Oxyde salin de fer (Fe^3O^4)	62.861
Anhydride titanique (TiO^2)	22.553
Anhydride silicique (SiO^2)	7.921
Bioxyde de manganèse (MnO^2)	4.802
Oxyde de magnésium (MgO)	0.451
Oxyde de calcium (CaO)	0.199
Oxyde d'aluminium (Al^2O^3)	1.110
Non déterminé	0.103
Fer total	45.496

Sable moyen. — Mélange de quartz plagioclase, hornblende et de restes d'oxyde de fer non magnétique et d'ilménite qui ne peuvent pas se séparer par les moyens physiques indiqués précédemment :

Quantité obtenue	27.89 °/₀
Densité	3.6093
Oxyde salin de fer (Fe^3O^4)	41.114
Anhydride titanique (TiO^2)	8.495
Anhydride silicique (SiO^2)	45.315
Oxyde de calcium (CaO)	0.714
Oxyde de magnésium (MgO)	0.311
Bioxyde de manganèse (MnO^2)	1.715
Oxyde d'aluminium (Al^2O^3)	2.225
Non déterminé	0.111
Fer total	29.757

Sable de gros grains. — Résidu obtenu, après séparation par des moyens physiques, de la plus grande partie des grains noirs qui présentent l'aspect de l'ilménite ou de l'oxyde salin de fer. Vu l'impossibilité d'obtenir, par ces moyens, l'élimination totale des minerais cités, il reste un corps de gros grains, de couleur un peu plus foncée que le sable commun, mais qui a l'aspect et des propriétés très semblables a ce dernier.

La composition de ce résidu s'est trouvée être la suivante :

Quantité résultante	18.13 °/₀
Densité	2.8877
Anhydride silicique (SiO^2)	57.180
Oxyde salin de fer (Fe^3O^4)	22.622
Anhydride titanique (TiO^2)	2.051
Bioxyde de manganèse (MnO^2)	1.281

Oxyde d'aluminium (M^2O^3).....	12.652 %
Oxyde de calcium (CaO).....	3.627
Oxyde de magnésium (MgO)	0.278
Perte par calcination.....	0.125
Humidité a 100-105°	0.063
Non déterminé.....	0.121
Fer total	16.373

3. SIMILITUDE ENTRE LES SABLES DE NECOCHEA ET CEUX DE D'AUTRES GISEMENTS AMÉRICAINS

Le témoignage des personnes qui ont dûment parcouru le littoral, au sud de Necochea, établit que les sables ferrugineux s'étendend très loin. Depuis Quequen j'usqu'à Punta Negra — quinze kilomètres plus au sud — on observe, sans interruption, un manteau abondant de sables ferrugineux qui suivent le bord de la mer avec une largeur de 30 à 80 mètres.

On les a également observés le long des côtes patagoniques, dans la république de l'Uruguay, a Punta Ballena près de Piriápolis. D'après Domeyko (1) les fers titanifères sont les minéraux des plus disséminés, qui se rencontrent des deux côtés de la cordillère des Andes, ainsi que dans le littoral du Pacifique.

Le fer titanifère de San Juan a donné la composition chimique suivante :

Sesquioxyde de fer.....	70.15 %
Oxyde ferreux	10.50
Anhydride titanique.....	15.60
Oxyde de calcium.....	0.28
Oxyde de magnésium.....	0.22
Quartz	2.56

A celui de Tupungato, correspond :

Oxyde ferreux.....	31.02 %
Sesquioxyde de fer.....	63.30
Anhydride titanique.....	6.07

En revanche, le fer titanique de Valdivia contient seulement un demi pour cent d'acide titanique.

Les sables ferrugineux des plages du Chili, analysée par Domeyko *(loc. cit.)*, ont donné la composition chimique suivante :

(1) Ignace Domeyko, *Mineralogía*, pages 99 à 110, Santiago de Chile, 1879.

Echantillon	Minerai	Oxyde ferreux %	Oxyde ferrique %	Anhydride titanique %	Oxydes de calcium et de magnésium %
1	magnétique	29.7	49.7	19.2	1.9
1	non magnétique	15.8	61.5	22.8	—
2	magnétique	28.0	69.4	2.9	vestiges
2	non magnétique	33.0	24.35	40.87	0.48
3	magnétique	93.21		3.10	3.10

Il y a aussi beaucoup de ressemblance avec les sables de Papado, Concon, Playa Ancha de Valparaíso, Punta Arenas, ainsi qu'avec ceux des gisements internes de Cobija à Bolivie. Latrille a trouvé à Calama, des minerais de fer contenant 85.9 pour cent d'oxyde de fer et 14.1 pour cent d'acide titanique ayant étudié aussi ceux de Coro Coro et de Arequipa qui se ressemblent.

Raimondi (1) cite un gisement important d'un minerai qui se rencontre au Pérou et qui a dans sa composition chimique beaucoup de ressemblance avec les précédents.

Dans tous ces cas il existe, de même que pour les sables de Necochea, un fer titanifère non magnétique qui, par sa composition et ses propriétés, correspond à l'ilménite étudiée par Lapparent (2), mélangé avec un oxyde salin de fer magnétique moins riche en acide titanique, qui a aussi un peu de picrotanite (3) constituée par du titanate de magnésium $MgTiO^3$.

Par ces renseignements, on voit que les fers titanifères sudaméricains ont une moindre proportion d'acide titanique que leurs similaires européens. Comme exemple de ces derniers, nous indiquerons l'analyse d'un échantillon étudié par R. Metzner (4) et quatre autres cités par Carnot (5) de sorte que l'on puisse comparer ces résultats avec ceux obtenus en étudiant les minerais similaires de notre continent.

(1) A. Raimondi, *Minerales del Perú*, Lima, 1878.

(2) A. de Lapparent, *Cours de Minéralogie*, page 462, 1884.

(3) Gustave Tschermak, *Mineralogie*, page 289, 1894.

(4) M. R. Metzner, *Composition de quelques Fers Titanifères*, page 255.

(5) Ad. Carnot, *Minerais de titane. Traité d'Analyse des Substances Minerales*, tome II, pages 691-696, Paris, 1910.

4. PRODUITS SIDÉRURGIQUES OBTENUS AVEC LES SABLES FERRUGINEUX DE NECOCHEA

L'amiral Jean P. Sáenz Valiente était un fervent admirateur de tout ce qui représentait une contribution à l'avancement industriel

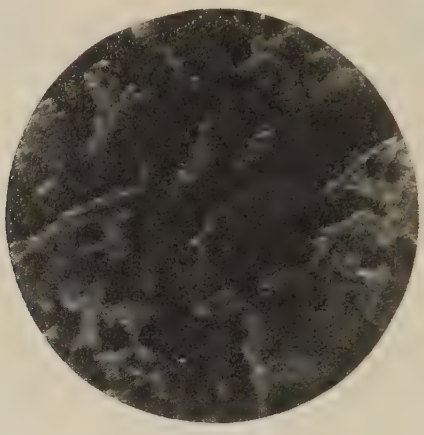


Figure 1

de l'Argentine. Il était aussi un homme intelligent et actif, toujours disposé à soutenir de son enthousiasme et de sa puissante action, les projets qui signifiaient une conquête de la science.

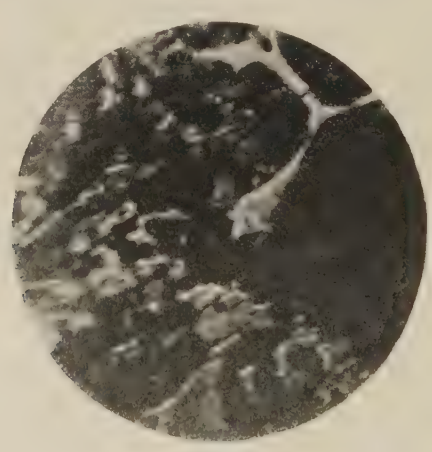


Figure 2

C'est lui qui nous conseilla l'étude des sables de Necochea et nous fournit un fragment de fonte de fer ainsi qu'une barre de ce métal

préparés, l'un et l'autre, aux ateliers de la Marine, en employant un minerai provenant des sables en question.

La fonte, quoique préparée dans des circonstances peu favorables à l'obtention d'un produit de bonne qualité (à cause des procédés imparfaits que l'on avait dû employer dans une opération qui était, pour ainsi dire, un essai préliminaire), présentait, cependant, un aspect uniforme, une fracture granulée regulière et une grande dureté, sans que l'on put observer une trop grande fragilité.

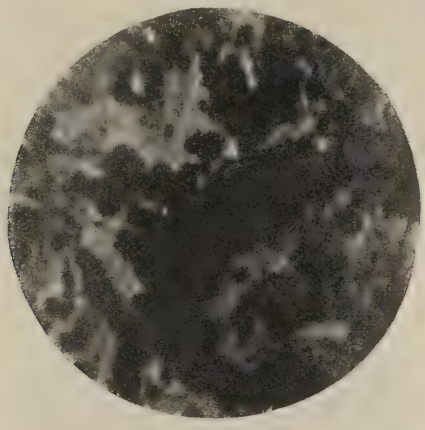


Figure 3

Nonobstant, l'étude micrographique, n'offre pas d'intérêt en ce qui se rapporte à cet échantillon, car on n'y observe qu'une abondance de cémentite, alternée avec de la ferrite constituant la perlite. (Voyez figures 1, 2, 3.)

Les données obtenus par l'analyse chimique de cet échantillon, analyse qui a été pratiquée avec la collaboration de notre camarade, le docteur Jérôme Angli, sont les suivantes.

Densité	7.154
Dureté, Brinell	197
Point de fusion	1750°
Carbone total	1.590 %
Carbone graphitique	0.646
Carbone combiné	0.944
Soufre total	vestiges
Phosphore	aucun
Titane	1.814 %
Sodium	1.016

Quant au fer, qui a été également obtenu de la manière indiquée, il se présente comme un produit intermédiaire entre l'acier et le fer doux ayant perdu les caractères de la fonte.

Voici les résultats obtenus par l'analyse de ce produit :

Densité	5.3799
Résistance à la traction	22 kg/mm²
Dureté, Brinell	128
Carbone total	0.915 %
Carbone graphitique	0.298 %
Carbone combiné	0.617 %
Soufre total	vestiges
Titane	1.015 %
Silice	0.784 %
Point de fusion	1800°

La résistance à la traction est moindre que celle qui correspondrait, a cause, sans doute, des soufflures et des fissures qui existaient dans l'échantillon comme défaut de fabrique.

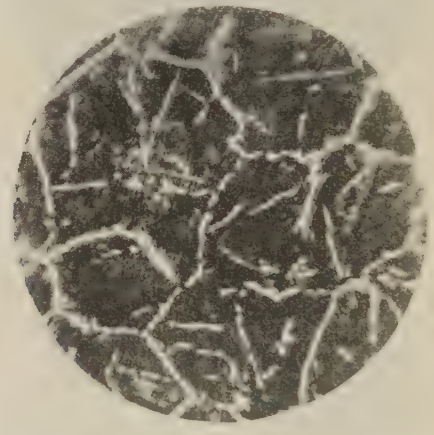


Figure 4

Les nombreuses observations de métallographie microscopique que nous avons réalisées avec le concours de notre confrère, le docteur Roger T. Babuglia, ne nous ont permis que de constater, dans cet échantillon, la présence d'une abondante quantité de ferrite en polygones hexagonaux qui accusent la structure polyédrique caractéristique du système cubique de cristalization des métaux (1). (Voir figures 4, 5 et 6.)

(1) Umberto Savoia, *La Métallographie appliquée aux Produits Sidérurgiques*, Paris. 1911.

Malgré que l'existance du titane a été établie par l'analyse chimique, on ne constate pas sa présence dans les préparations microscopiques car, comme l'a démontré L. Guillet, quoique cet élément existe dans la proportion de 9 pour cent, il ne modifie pas la structure micrographique des aciers (1).

L'évaluation du titane a été exécutée par la méthode de J. Parry et J. J. Morgan (2); quant au carbone total, il a été déterminé par la méthode d'oxydation sans la préalable séparation du fer, d'accord

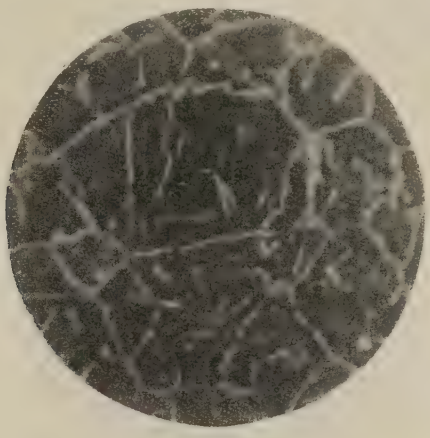


Figure 5

à la recommandation de la Comission Internationale d'Allemagne, États Unis, Angleterre et Suède (3), en employant un appareil spécial construit par Corleiss (4). Pour investiguer le soufre, on a employé la méthode Rollet Campredon (5); et relativement à la silice, ce sont aux indications établies à leur sujet pour l'analyse des fers titanifères, que nous avons eu recours (6).

Dans ces deux échantillons analysés, il existe du titane en quantités supérieures à 1 pour cent et, même à 2 pour cent dans l'une d'elles. En préparant des agglomérés spéciaux avec de l'asphalte

(1) Félix Robin, *Traité de Metallographie*, page 291, Paris, 1912.

(2) J. Parry et J. J. Morgan, *Détermination du Titane dans les Fers et les Aciers. Stahl and Eisen*, page 898, 1893; G. Arth, *Procédés de Dosage*, page 296, 1897.

(3) *Le Moniteur Scientifique du docteur Quenesville*, page 438, 1894.

(4) G. Bourrey et Marquet, *Traité d'Analyse Chimique*, page 255, Paris, 1908.

(5) J. Hognon, *Traité d'Analyses Chimiques Métallurgiques*, page 83, Paris, 1911.

(6) Vittorio Villavecchia, *Trattato di Chimica Analitica Applicata*, volume I, page 277, Milano, 1916.

comme agglutinant, du noir de fumée comme réducteur et une abondante quantité de fondant bassique calcaire, nous avons pu, avec les sables ferrugineux de Necochea, obtenir au four électrique des laboratoires de l'Armée, des régules de fer métallique de moins de 0.5 pour cent de titane.

Dans ces conditions, il n'y a pas à craindre que la présence du titane dans le minerai qui nous occupe, puisse résulter un inconvénient pour son exploitation industrielle. La fabrication d'alliages ferrugineux à base de titane, quoique encore peu développée, même sur le continent européen, adquiert actuellement une très grande im-

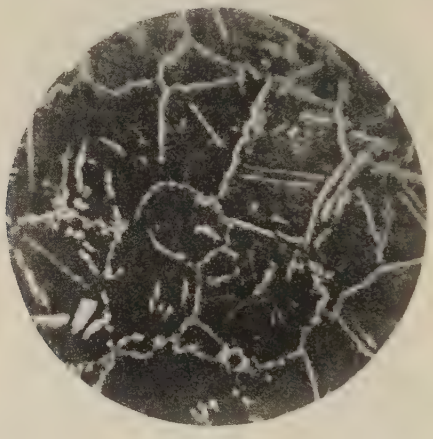


Figure 6

pulsion aux États Unis d'Amérique du Nord. La « Titanium Alloy Manufacturing Co. » a Niagara Falls, ainsi que la « Metal and Thermit Corporation » de New York (1) nous offrent une évidente démostration de cette importance. Mais même pour l'exploitation industrielle sidérurgique, la présence de petites quantités de titane dans le minerai de fer, a cessé d'être un inconvénient, vu la facilité avec laquelle les méthodes modernes électrométallurgiques permettent aux fondants bassiques de séparer l'élément étranger. Ce fait a été démontré aux États Unis de l'Amérique du Nord.

Les propriétés réductrices des fers titanifères et des silico titanates adquièrent sans cesse, en sidérurgie, de plus grandes applications au fur et à mesure que les procédés métallurgiques se modifient par

(1) En *Chimie et Industrie, 1914-1924. Dix ans d'éfforts scientifiques industriels et coloniaux*, page 322, Paris, 1926.

l'emploi de l'alumine thermique et des facilités obtenues par l'emploi de l'houille blanche.

Le perfectionnement et les méthodes de préparation des agglomérés et l'application de ces derniers à la métallurgie du fer, permettent d'utiliser des minerais réduits en poudre, des résidus de pyrites, et de la poudre de gueulard sans aucune autre précaution que l'augmentation du coût occasionné par l'emploi de la matière première nécessaire à la fabrication des agglomerés. Ces procédés ne résultent pas économiques quand l'on doit avoir recours à l'industrie des Hauts Fournaux, parce que, la consommation élevée de charbon qu'exige la réduction du minerai, s'ajoute à la correspondante valeur de l'agglutinant et à la dépense relative à la fabrication des briquettes. Dans le cas des sables ferrugineux, qui ont généralement un grain fin comme ceux de Necochea, cela devient un inconvénient considérable qui peut préjudicier le succès d'une entrepise si celle-ci prétendait appliquer les anciennes méthodes de métallurgie, actuant avec des Hauts Fournaux alimentés avec de la houille; mais cela n'aurait pas lieu dans notre cas, le jour où les agglomérés obtenus avec des résidus de pétrole — qui pourrait provenir de Comodoro Rivadavia — seraient soumis à un traitement électrochimique basé sur l'emploi d'une énergie hydroélectrique économique.

Depuis que le four primitif de Stassano a été construit, jusqu'aux fours modernes de Heroult, Röchling-Bodenhauser, Kjellin et Keller, l'électrosidérurgie a progréssée d'une étonnante façon à mesure que l'emploi des sauts d'eau, ou que l'exploitation des forces hydrauliques, ont permis d'obtenir l'énérgie électrique dans de très avantageuses conditions.

Il est impossible d'envisager le problème de l'exploitation des sables ferrugineux de Necochea, sans tenir compte de ces conquêtes modernes de la science qui modifient foncièrement les procédés métallurgiques. De même que la méthode de Porter permet l'exploitation des magnétites du Canadá qui contiennent de 12 a 15 pour cent d'oxyde de titane, en employant des agglomérés faits avec une quantité convenable de flux bassique qui élimine l'excès d'impuretés titanifères et ayant recours au procédé électro-chimique qui emploie le four Heroult, de même, disons nous, on pourra obtenir des résultats satisfaisants avec les sables ferrugineux de Necochea, le jour où une exploitation moderne utilisera l'énergie hydroélectrique qu'un avenir prochain fournira à l'Argentine dans d'excellentes conditions économiques.

5. POSSIBILITÉ DE L'EXPLOITATION DES SABLES FERRUGINEUX

Tous ceux qui ont pensé à la possibilité d'extraire le fer de ces sables en se laissant guider par certain criterium péssimiste très généralisé, et sans approfondir autrement l'étude du problème, ont abouti à des conclusions désolantes, qui leur ont fait abandonner la question sans même prendre la peine de publier les fruits de leurs observations.

C'est ainsi que l'on a prétendu démontrer l'utopie du profit industriel de ces gisements en calculant la quantité énorme de substances qu'il y aurait à manipuler pour extraire le fer, existant seulement en une mince proportion, inférieure à un pour cent de la magnétite sur le masse totale de sable existante sur la plage. Cet argument, aussi apparent que fragile, ne considère pas la facilité avec laquelle on pourrait séparer, au moyen d'un électroaimant, tout l'oxyde magnétique, et avec un tamis convenable et un simple lavage la plupart du minerai non magnétique, l'un et l'autre contenant 50 pour cent de fer pur, sans tenir compte de l'acide titanique, lequel, étant contenu à un taux de 15 à 20 pour cent, pourrait être parfaitement utilisé.

Dans ces conditions, les quantités de silice et de corps étrangers non utilisables, n'arrive pas à 5 pour cent, en deduisant l'oxygène des oxydes ferriques et titaniques, sans que l'opération de séparer le minerai magnétique ainsi que l'ilménite non magnétique, représente une surcharge très importante des frais d'exploitation.

En nous basant sur les résultats obtenus par les analyses que nous venons de consigner et qui, comme nous l'avons exprimé, se rapportent à un échantillon de dix kilogrammes duquel on a obtenu, sous forme de magnétite, de l'oxyde de fer magnétique; de l'ilménite (oxyde de fer titanifère non magnétique); du sable moyen, suffisamment riche en minerai ferrugineux, et du sable gros, qui constitue le résidu après les séparations précédentes, nous trouvons des chiffres qui surpassent considérablement le un pour cent de magnétite dans la totalité du sable de la plage, comme l'on a prétendu établir.

Dans le tableau suivant, nous avons réuni les quantités qui représentent la richesse en oxyde salin de fer, et ce qui correspond au fer pur dans chacune des portions dont on a partagé l'échantillon avant de le soumettre à l'analyse chimique.

Partie de l'échantillon	Proportion do l'élément	Quantité d'oxyde ferrique contenu	Fer pur correspondant
Minerai magnétique (magnétite)	29.22	22.383	16.200
Minerai non magnétique (ilménite)..	24.76	15.565	11.267
Sable moyen.....	27.89	11.467	8.299
Sable résidu.....	18.13	4.101	2.968
Total.....	100.00	53.516	38.734

La proportion de magnétite et d'ilménite pourra varier comme nous l'avons accepté au début; elle pourra résulter supérieure ou inférieure à 53.516 pour cent d'oxyde salin de fer, qui correspond a 38.734 pour cent de fer pur, chiffre que nous avons trouvé dans l'échantillon étudié; malgré cela, nous sommes loin du un pour cent de magnétite qu'on a voulu attribuer aux sables de Necochea, puisque le résidu — après la séparation du minerai magnétique — de la partie ferrugineuse non magnétique et même du sable moyen, contient encore 22,622 pour cent d'oxyde ferrique, qui correspond a 16.373 pour cent de fer pur.

On a prétendu démontrer aussi l'inutilité de ces gisements en tenant compte du prix du combustible et du réducteur à employer. C'est un argument vraiment sérieux mais il n'empêche pas que cela ne soit possible dans un avenir pas trop lointain, quand le courant électrique pourra s'obtenir à bas prix, soit par l'expansion de nos gisement pétrolifères, soit par l'intermédiaire de l'inépuisable générateur d'énergie que représentent les marées patagoniques lequel, entre les fines ironies des sceptiques et l'enthousiasme des admirateurs, devrait fatalement s'imposer comme étant une des plus puissantes ressources de la richesse nationale.

Il ne manque pas de géologues étrangers — parfois peu portés à considérer l'importance des richesses naturelles de notre pays — qui ont méprisé les gisements de ces sables en se basant sur le fait que la quantité de minerai ferrugineux existante est bornée, et que l'on ne constate aucune augmentation de ce minerai mais bien un simple changement de lieu suivant les va et vient du flux et du reflux de la mer le long de la côte, ou de la direction des courants. Cela n'est pas, cepen dant, un motif suffisant pour accepter ou nier l'abondance du minerai ferrugineux deposé au fond de la mer dans cet endroit, car, qu'elle que soit l'importance du gisement, les flots se chargeront toujours de charrier les grains ferrugineux jusqu'à la côte, de les changer de place, de les entraîner jusqu'à un endroit où ils pourront être utilisés, ainsi que de les rétablir à leur primitif gisement sous-marin, si les habitants de

la contrée n'ont pas su dans leur peu d'enthousiasme, en tirer parti.

La différence de densité entre le matériel ferrugineux et le sable commun qui le contient, est dans la proportion de 4.6 à 2.5 comme il a été dit dans la présente monographie. Une loi physique nous porte à supposer que, dans le plan incliné de la côte, les grains noirs de plus grande densité, en mouvement continuel par le va-et-vient de flots, rouleront plus vite vers les profondeurs de l'abîme, pour retourner entraînés par la force de la mer, sans que le manque de grands dépôts sur la rivière, dépôts qui pourraient, avec le temps, augmenter en quantité, soit un indice de l'exiguïté du gisement au point de lui enlever son importance.

Au contraire, la déviation du compas observée par les marins aux environs de la région, de même que les observations de gens qualifiés, voisins de ces localités, prouvent que, après les grandes tempêtes, le sable de la grève est plus riche en minerai ferrugineux ; tout cela sont des faits qui, sans démontrer précisement l'importance du gisement sous-marin, permettent, du moins, de croire avec fondement, que la rareté de la matière première ne sera pas un obstacle au succès d'une exploitation bien organisée, puisque la mer qui nous offre généreusement le minerai se chargerait, dans son continuel et rithmique travail, de le rétablir au fur et à mesure des besoins.

Nous avons fait voir que les sables ferrugineux, de composition très ressemblante à ceux étudiés ici, continuent au sud de Necochea occupant des kilomètres et des kilomètres de plage, le long des côtes patagoniques, au détroit de Magellan, dans les plages du Chili et du Pérou, appartenant aux gisements intérieurs de Cobija en Bolivie, en conservant partout une semblable composition chimique. Il y a des fers titanifères à Córdoba, comme l'a reconnu, il y a plusieurs années déjà Stelzner, dans la cordillère des Andes, tant du côté argentin que du chilien; et notre savant professeur Bodenbender (1) a soutenu que, probablement, la plus grande partie de l'hématite du pays, appartient au fer titanique. N'y a-t il pas, après cela, des fondements suffisants pour croire que les gisements de Necochea peuvent pourvoir le minerai nécessaire à une future exploitation?

Étudions donc avec insistance le côté technologique du problème sans craindre l'épuisement d'un matériel si précieux, avec l'assurance que, ce faisant, nous aurons fait un des plus grands services à l'avancement industriel de notre pays.

(1) Guillaume Bodenbender, *Los Minerales. Su descripción y análisis,* page 80.

DATOS QUÍMICOS SOBRE « CHENOPODIUM QUINOA » WILLD.

Por CARLOS M. ALBIZZATI
Doctor en química e ingeniero agrónomo

y

ROBERTO FAURA
Ingeniero agrónomo

RÉSUMÉ

Renseignements sur « Chenopodium quinoa » Willd. — Les auteurs ont étudié les grains de « quinoa », et comparé les résultats obtenus avec ceux d'autres céréales. Ils trouvent, pour les premiers, une supériorité de protéine : de graisses, d'hydrates de carbone, de matières minérales. Relativement au moulage, ils déduisent de leurs expériences que l'on peut extraire un 50 pour cent de farine blanche, apte, seule ou melangée avec de la farine de blé, pour fabriquer du pain.

La importancia que toma diariamente el conocimiento de los vegetales indígenas en nuestro país, ha hecho que lleváramos a cabo un estudio químico de las semillas de « quinoa », creyendo con esto aportar ciertos conocimientos útiles para su mejor aprovechamiento dietético y económico.

El problema económico en el altiplano del noroeste argentino, donde una gran parte de la población indígena tiene como base de su alimentación el fruto de esta planta de cultivo inmemorial, indujo a nuestro Enviado Extraordinario y Ministro Plenipotenciario en Bolivia, doctor Horacio Carrillo, a elevar un informe interesante sobre la importancia alimenticia de la « quinoa », a fin de que nuestro Ministerio de Agricultura prestara una mayor atención a su difusión, divulgándolo también en zonas donde el cultivo de cereales fuera imposible.

Debemos agradecer a nuestro colega, ingeniero agrónomo R. Uro, el habernos facilitado la semilla necesaria para la realización de este trabajo, e igualmente al distinguido profesor José F. Molfino la descripción botánica y datos bibliográficos correspondientes.

DATOS BOTÁNICOS

Chenopodium quinoa Willd.

(n. v. *quinoa, quinua, jupha* (aymará))

De Candolle, *Prodromus,* XIII, 2 (1849), 66.
Gay, *Hist. de Chile, Botánica,* V (1849), 230.
Grisebach, *Symbolae ad Flor. argent.* (1879), número 184.
Hauman et Irigoyen, *Catal. des Phanérog. Dicotyl.,* I (1923), 94.

Planta herbácea, anual, de hasta 1^{m}50 de altura, totalmente glabra; de tallo erguido anguloso, blanco verdoso, recorrido por líneas de un verde más acentuado, ramificado, con los ramos ascendentes o

Fig. 1. — Vista parcial de un cultivo de « quinoa » en el campo experimental de la Facultad de Agronomía de La Plata

tendidos; de hojas largamente pecioladas, triangulares ovaladas, más o menos redondeadas, de base cuneiforme, obtusas o apenas agudas, tenuemente mucronuladas, enteras o desigualmente dentadas, blanco verdosas, luego rojizas; las inferiores son romboideo-subdeltoideas, uni o biauriculadas en cada lado; las extremas superiores son lanceoladas o deltoideo lanceoladas.

Flores blanquecinas, hermafroditas, rara vez femeninas por aborto del androeceo, reunidas en racimos alargados y compactos. Cáliz quinquefido; estambres 5, con los filamentos contraídos, soldados hacia la base. Fruto envuelto por el cáliz semilla de epispermo crustáceo, frágil, liso, lustroso, de albumen rico en almidón.

Esta especie vive desde Colombia hasta Chile, en ambas vertientes de los Andes; se encuentra en el noroeste argentino, debiendo considerarse erróneas las citas hechas para más al sur de Catamarca y más al este de Tucumán y Salta.

En la Puna argentina (Los Andes, Salta y Jujuy), la « quinoa », el « trigo inca » *(Amarantus)* y las papas, son los únicos farináceos cultivados. Durante la última guerra, fué la « quinoa » una de las plantas cuyo cultivo se ensayó con éxito en Alemania, indicándose como succedáneo del arroz. En el año 1929 efectuamos, en el campo experimental de la Facultad de Agronomía de La Plata, siembra de « quinoa », habiéndose observado un buen desarrollo de las plantas, como puede verse en la fotografía adjunta.

DATOS QUÍMICOS

La semilla de « quinoa » estudiada es la que se utiliza para la alimentación, siendo su coloración débilmente amarillenta, casi blanca.

Los métodos analíticos aplicados son los recomendados por la A. O. A. C., habiéndose efectuado determinaciones analíticas, valor calórico indirecto, relación nutritiva, valor nutritivo, etc., no solamente en la semilla, si que también en la harina obtenida, afrecho, etc.

Efectúose la molienda del grano, obteniéndose una harina blanca, granulosa, realizando con ésta la elaboración del pan. Presenta cierta dificultad en el empaste e igualmente durante el proceso fermentativo, debiendo este último ser cuidadosamente vigilado para poder moldear el pan; si se deja pasar el límite de fermentación, la pasta tiende a fluidificarse, haciéndose imposible el trabajo panaderil.

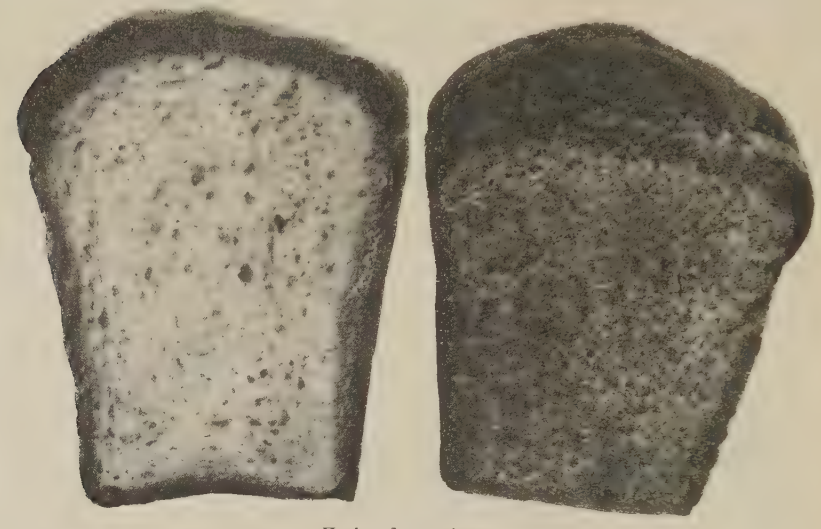
El pan obtenido presenta un cierto sabor característico, algo aromático, no siendo apetecible al paladar acostumbrado al consumo de pan de trigo.

Es un pan de mucha duración, pues al secarse puede considerarse como una galleta.

Se efectuaron también experiencias de panificación, mezclando a lá harina de « quinoa » harina de trigo, en la proporción de 50 por ciento,

habiéndose obtenido un pan más agradable y de más fácil elaboración, por ser más consistente la pasta y no fluidificarse tan fácilmente.

Tanto la operación de molienda como la de panificación experimen-



Harina de « quinoa »

Harina de « quinoa » con 50 % de harina de trigo

Fig. 2. — Panificación de la « quinoa »

tal, se llevaron a cabo según métodos «standards» dados por A. A. Ch. Dada la riqueza en aceite que contiene el afrecho se efectuó la extracción con éter sulfúrico estudiándose su característica, cuya cifra se encuentra resumida en el cuadro 5.

Las investigaciones de las cenizas se llevaron sobre semillas, determinándose únicamente los elementos que consideramos más importantes para compararlos con los de otros cereales.

Para los diversos usos y aplicaciones que posee la semilla de « quinoa, puede consultarse la obra publicada por Juan A. Domínguez, titulada *Contribuciones a la Materia Médica Argentina*, año 1928, donde encontrará además el interesado una selecta bibliografía al respecto.

CUADRO 1. — *Composición química de la semilla*

Humedad	9.800 %
Cenizas	4.080
Materias azoadas (N × 6.25)	13.200
Materia grasa	4.010
Almidón y azúcar	61.860
Celulosa	5.100
Pentosanos y sub no determinados	1.950
	100.000

Valor calórico de la semilla

	Por ciento	Calorías por gramo	Grandes calorías por kilogramos
Materia azoada (N × 6.25)	13.200	4.125	544.50
Materia grasa	4.010	8.975	359.89
Almidón y azúcar	61.860	4.000	2474.40
Calorías totales		3378.79	

$$RN = \frac{1}{7.31}.$$

Esta relación está calculada usando los coeficientes de las tablas de Wolff.

El valor nutritivo bruto expresado en almidón, se efectuó con los coeficientes usados por Kellner.

Valor nutritivo bruto expresado en almidón	80.77
Valor nutritivo neto expresado en almidón	66.23
Valor calórico expresado en almidón	2649.20 cal.

CUADRO 2. — *Datos sobre la molienda*

Peso hectólitro	75.60 %
Quinoa limpia	95.00
Impurezas	5.00
	100.00

Afrecho y afrechillo.....	44.62 °/₀
Semitin.....	5.31
Harina total	50.07
	100.00
Blancura de la harina.....	92.00

Rendimiento sobre « quinoa » sucia

Afrecho y afrechillo.....	42.39 °/₀
Semitin.....	5.05
Harina total	47.56
Impurezas.....	5.00
	100.00

CUADRO 3. — *Datos químicos sobre la harina de « quinoa » (extracción aproximada del 50 por ciento)*

Humedad.....	12.918 °/₀
Cenizas.....	0.618
Materia azoada (N × 6.25).....	3.292
Materia grasa.....	1.166
Celulosa.....	0.352
Almidón y sub no determinadas	81.654
	100.000

Valor calórico de la harina

	Por ciento	Calorías por gramo	Grandes calorías por kilogramos
Materia azoada (N × 6.25)...	3.292	4 125	135.79
Materia grasa	1.166	8.975	104.65
Almidón y sub no determinada.	81.654	4.000	3266.16
Calorías totales.....		3506.60	

$$RN = \frac{1}{28.8}.$$

Valor nutritivo bruto expresado en almidón...	88.81
Valor nutritivo neto expresado en almidón....	72.82
Valor calórico expresado en almidón	2912.80 cal.

CUADRO 4. — *Datos químicos sobre el afrecho de « quinoa »*

Humedad.....	2.330 °/₀
Cenizas.....	6.092
Materia azoada (N × 6.25).....	16.804
Materia grasa	12.896
Celulosa.....	4.330
Hidrato de carbono	57.548
	100.000

Valor calórico

	Por ciento	Calorías por gramo	Grandes calorías por kilogramos
Materia azoada (N × 6.25)...	16.804	4.125	693.17
Materia grasa	12.896	8.975	1157.42
Hidrato de carbono (almidón, azúcar, etc.).....	57.548	4.000	2301.92
Calorías totales.....		4152.51	

$$RN = \frac{1}{4.52}$$

Valor nutritivo bruto expresado en almidón...	82.60
Valor nutritivo neto expresado en almidón....	67.73
Valor calórico expresado en almidón	2709.20 cal.

CUADRO 5. — *Datos analíticos del aceite obtenido del afrecho de « quinoa » (extracción con éter sulfúrico)*

Color.....	Amarillento
Densidad + 15° C	0.9267
Índice de acidez libre de ácido oléico...	7.070
Índice de saponificación Kosttoffer.....	150.0
Índice de Iodo Hubl.....	102.9

CUADRO 6. — *Datos analíticos sobre panificación de harina de « quinoa »*

Absorción de agua	60.0 %
Volumen de 650 gramos de pasta	1680.0 c. c.
Volumen específico.....	3300.0 c. c.
Blancura de la miga.....	89.5
Contextura de la miga....	87.0

Composición química del pan de « quinoa »

Humedad	36.440 %
Cenizas.....	1.902
Materia azoada (N × 6.25).....	1.140
Materia grasa	0.421
Celulosa.....	0.098
Hidrato de carbono (almidón, azúcar, etc.).	59.999
	100.000

Valor calórico del pan

	Por ciento	Calorías por gramo	Grandes calorías por kilogramos
Materia azoada (N × 6.25) ...	1.140	4.125	45.83
Materia grasa	0.421	8.975	37.78
Almidón y sub no determinada.	59.999	4.000	2399.96
Calorías totales		2483.57	

$$RN = \frac{1}{61.6}.$$

Valor nutritivo expresado en almidón	60.04
Valor calórico expresado en almidón	2401.60 cal.

CUADRO 7. — *Datos analíticos sobre panificación de harina de « quinoa » con el 50 por ciento de harina de trigo*

Absorción de agua	57.0 %
Volumen de 650 gramos de pasta	1790.0 c. c.
Volumen específico	3448.0 c. c.
Blancura de la miga	88.0
Contextura de la miga	85.0

Composición química del pan

Humedad	37.320 %
Cenizas	2.094
Materia azoada (N × 6.25)	3.925
Materia grasa	0.439
Celulosa	0.108
Hidrato de carbono (almidón, azúcar, etc.).	56.114
	100.000

Valor calórico del pan

	Por ciento	Calorías por gramo	Grandes calorías por kilogramos
Materia azoada (N × 6.25) ...	3.925	4.125	161.91
Materia grasa	0.439	8.975	39.40
Almidón y sub no determinada.	56.114	4.000	2244.56
Calorías totales		2445.87	

$$RN = \frac{1}{16.6}.$$

Valor nutritivo expresado en almidón	58.83
Valor calórico expresado en almidón	2353.20 cal.

CUADRO 8. — *Composición química de la semilla de « quinoa »*

P_2O_3	33.258 %
SO_3	4.361
CaO	1.482
MgO	8.762
K_2O	30.318

CUADRO 9. — *Cuadro comparativo de la « quinoa » con otros cereales*

Datos	Quinoa	Trigo (1)	Maíz (1)	Arroz (1) y (2)
Humedad	9.800 %	11.34 %	12.28 %	10.25 %
Cenizas	4.080	1.46	1.49	0.60
Materia azoada (N × 6.25) (3).	13.200	11.72	10.67	7.69
Celulosa	5.100	2.65	1.68	vestigio
Materia grasa	4.010	2.08	4.30	0.16
Hidrato de carbono	63.810	70.75	69.58	81.30

CONCLUSIONES

1ª De los datos analíticos obtenidos en la semilla de « quinoa », comparada con los demás cereales, presenta cierta superioridad en el porcentaje de materias proteicas, grasas, hidratos de carbono y materias minerales;

2ª En la constitución mineral de la semilla, predomina el fósforo y la potasa, debiendo considerarse a éste último rico en dichos elementos;

3ª De los datos de molienda experimental se deduce que puede extraerse un 50 por ciento de harina blanca y factible para la elaboración panaderil, bien sola o mezclada con harina de trigo. Sería este un problema que resolvería, por lo menos, la cuestión económica en las regiones del altiplano en el consumo de harina;

4ª Debiera fomentarse el cultivo de la « quinoa » en nuestro país, en las regiones áridas, por ser ésta una planta que substituye con ventaja donde el cultivo del trigo, maíz, etc., no fuera posible;

(1) Cifra de término medio de análisis efectuado en la cátedra de Química Agrícola. Facultad de Agronomía de La Plata. C. Albizzati.

(2) Procedencia Tucumán, sin cáscara.

(3) Se usó el factor 6.25, en lugar de 5.75, en todos los casos.

5ª El Ministerio de Guerra debiera ensayar, en el racionamiento de las tropas de las provincias de Jujuy y Salta, el consumo de la « quinoa » en la preparación de platos nacionales, muy apetecidos por los pobladores de la región, por ser éste un producto de alto valor alimenticio.

BIBLIOGRAFÍA

Carrillo, Horacio, *La quinua, su cultivo en los altiplanos*, Buenos Aires, 1927.

Domínguez, Juan A., *Contribuciones a la Materia Médica Argentina*, Buenos Aires, 1928.

Mörse, Witkrow, *Applied Biochemistry*, Philadelphia, 1927.

Official and Tentative Methods of Analy-sis of the A. O. A. C., Washington, 1925.

La Plata, 1930.

NOTICIAS ACERCA DE UN ESQUELETO JUVENIL

PERTENECIENTE A LOS

GRANDES CARNÍVOROS EXTINGUIDOS : « SMILODON BONAËRENSIS »

Por CARLOS RUSCONI

RÉSUMÉ

Notice sur un squelette juvénile appartenant aux grands carnivores éteints : Smilodon bonaërensis. — L'auteur, après une breve description de ce squelette fossile — description qui n'avait pas été encore faite — le compare à une autre squelette adulte, l'illustrant de plusieurs figures. Il donne ensuite des mesures relatives à ces deux tigres éteints.

I

Aunque son relativamente abundantes los restos óseos de los grandes felinos extinguidos hallados en diversos niveles de la formación pampeana casi todos, sin embargo, pertenecen a animales adultos, y nunca se había descrito entre nosotros individuos juveniles como es el caso del que voy a ocuparme brevemente.

Estos carnívoros fueron descubiertos y descritos, por primera vez en Sudamérica, por el doctor Lund, hace casi un siglo, y procedían de cavernas brasileñas. Entre nosotros lo dió a conocer el doctor Muniz, en *La Gaceta Mercantil* de fecha 9 de octubre de 1845, en una descripción bastante extensa basada sobre un espléndido esqueleto que descubrió en terreno pleistocénico, en las proximidades del pueblo de Lujan, provincia de Buenos Aires, y al que denominó *Muñifelis bonaërensis* (hoy *Smilodon bonaërensis)*. Posteriormente, se ocuparon de estos mismos restos y otros hallados después, los sabios : Burmeister (1864

y 1881); Gervais y Ameghino (1880); Ameghino (1889 y 1907), etc.

El ejemplar juvenil es el más completo y el animal de menor edad que se haya dado a conocer hasta ahora. Proviene de terreno *bonaerense*, próximo a las barrancas del río Las Conchas, localidad cercana a la de donde fué exhumado el esqueleto arriba citado y que hoy lleva el número 5822 de la colección de Paleontología del Museo de Buenos Aires. Dichos restos pertenecieron a un espécimen muy juvenil, porque los dientes de leche recién comenzaban a entrar en función. Se conservan: casi todo el rostro, desde la punta de los premaxilares hasta la parte superior de los huesos maxilares; porción basal del cráneo; varias vértebras completas; numerosas costillas; una porción escapular del lado izquierdo, y otros restos muy deteriorados.

Antes de terminar estas líneas es para mí un deber agradecer al distinguido paleontólogo, profesor L. Kraglievich, por la atención que ha tenido al facilitarme el material para este estudio. Los dibujos del texto son del autor.

II

DESCRIPCIÓN

Incisivos. — El i^1 de leche (fig. 1) es pequeño y comprimido transversalmente; el i^2 tiene igual sección, pero algo más robusto; su corona es encorvada hacia atrás, y en la cara posterior de la misma se ven dos cíngulos de esmalte en forma de crestas convergentes hacia la base y línea media del diente. El i^3, o lateral, es el más voluminoso de todos, la base coronaria tiene 7 milímetros de diámetro anteroposterior y 5,5 en sentido transverso; el cíngulo basal del lado interno tiene mayor longitud.

Los incisivos reemplazantes, o de la segunda dentición, son mucho más robustos y difieren de aquellos porque en la base y cara posterior de la corona no existe, al parecer, la cresta citada, sino tan sólo dos pequeños tubérculos laterales, siendo en general más fuerte el del lado interno. En la cara interna del tercer incisivo aparece una cresta bastante desarrollada, mientras en el lado opuesto es poco aparente.

No hay mucha diferencia, entre el canino de leche y el reemplazante; la longitud del órgano caduco mide 57 milímetros, y 224 en el reemplazante cuando se encuentra bien desarrollado; la corona de

este último tiene 174 milímetros de longitud y solamente 35 el diente de leche. La sección es, más o menos, similar en ambos órganos, con la diferencia de que los bordes son levemente dentellados y no tan acentuados como en el diente de la segunda dentición. El diámetro anteroposterior del órgano adulto al nivel alveolar, tiene 45 y 22 en sentido transversal; en el diente de leche 17 y 7,5, respectivamente.

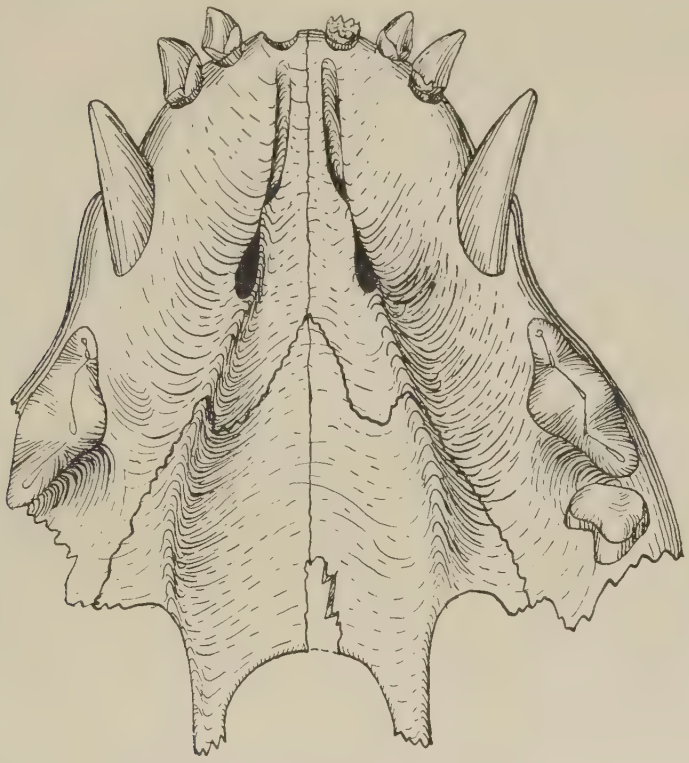


Fig. 1. — Vista del paladar de *Smilodon bonaërensis*, con su dentadura de leche (En tamaño natural)

El dp^3 (fig. 2) es extraordinariamente grande, puesto que mide 24 milímetros de diámetro anteroposterior en contra de 15 que tiene el mismo de reemplazamiento. La corona es también más complicada y se parece bastante a la construcción del cuarto premolar reemplazante o carnicero, como ocurre precisamente en numerosos felinos vivientes. Posee tres raíces, de las cuales la posterior ocupa casi la longitud del diente. El premolar, que va a ocupar el mismo lugar (fig. 3, p^3), aparece entre las raíces anterior y posterior de aquél; tiene

muy poco desarrollo y está constituído únicamente por la cúspide o gran tubérculo central. A continuación viene el dp^4, muy pequeño y más ancho que largo; su corona está bastante deteriorada y posee tres raíces : dos externas y una interna. El diámetro anteroposterior de la corona es 3,4 veces menos que la del dp^3; mientras que en el diente reemplazante ocurre un caso inverso, puesto que es 2,8 veces mayor que el penúltimo premolar de la misma serie. Delante del dp^2 no he visto vestigio de otro diente (p^2) que aparece normalmente en numerosos félidos vivientes y fósiles.

Cráneo. — La longitud del premaxilar tiene 60 milímetros, y su extensión horizontal, desde la parte más anterior y medial hasta el margen anterior del alvéolo canino, 25. Sobre el borde de cada uno de estos huesos (fosa nasal) y a unos 22 milímetros de altura del fondo de la citada fosa, existe un proceso óseo en forma de cresta elevada, que en otros felinos de edad juvenil no existe, o por lo menos es muy rudimentario. En dicho proceso finaliza la extremidad anterior del hueso nasal, y la distancia entre estos elementos es de 25 milímetros (fig. 4). En el paladar se observan dos grandes crestas longitudinales *(torus palatinus)* divergentes hacia atrás; nacen al nivel de los agujeros incisivos y se abren, describiendo una ligera curvatura, hasta perderse en el borde externo de los huesos palatinos. Entre estas crestas y la serie alveolar aparece una profunda y amplia depresión, que en algunas partes alcanza hasta 6 milímetros de hondura. La zona central, comprendida entre dichas crestas, es más elevada, de tal modo que parecería ser una lengüeta ósea aplicada sobre el paladar. Este carácter es más o menos similar en los individuos adultos a diferencia de que las crestas longitudinales son mucho más robustas que las del ejemplar juvenil.

Fig. 2. — Vista interna del p^3 caduco. (En tamaño natural.)

La parte basal del cráneo comprende una porción del hueso basisfenoides, restos del hueso temporal y hueso petroso del lado derecho; este último elemento mide 31 milímetros de largo por 20 de ancho. En la parte profunda, y detrás de la apófisis postglenoidea, existe un hueso de figura irregular e incompletamente soldado, que contribuye a formar parte del conducto auditivo externo. Este elemento, por la situación y aspecto, corresponde al *annulus tympanicus* de otros felinos. En la figura 5*a* reproduzco una vista lateral del hueso temporal

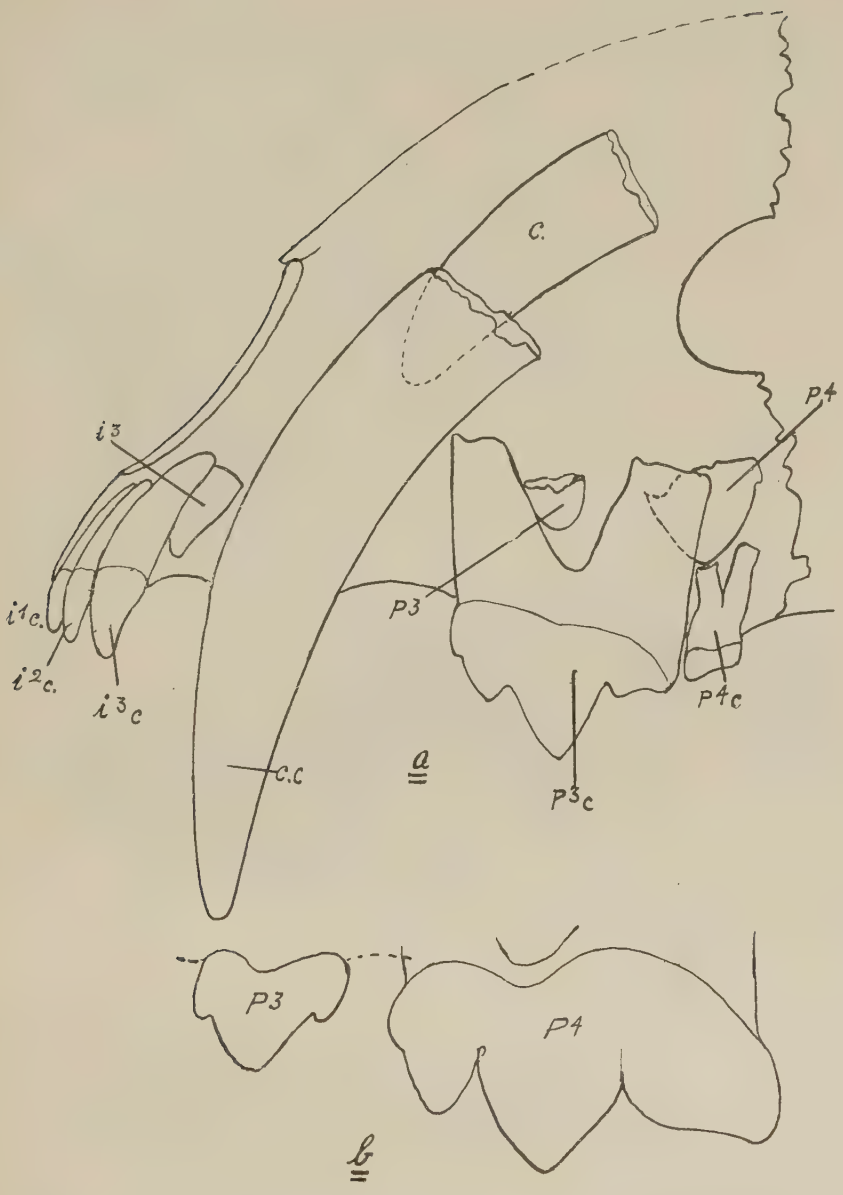


Fig. 3 *a*. — p^3 y p^4, representan los dientes reemplazantes; $i^1 c$ y siguientes, los órganos de leche. En la figura 3 *b* los dos dientes de reemplazamiento completamente desarrollados de *S. bonaërensis*. (Tamaño algo aumentado.)

Fig. 4. — Vista lateral del rostro juvenil de *S. bonaërensis*. (Algo aumentada

con sus diversos elementos componentes; y en la figura 5*b* el de un individuo joven de *Felis leo*, en el que recién comenzaban a entrar en función los dientes reemplazantes, para demostrar las profundas

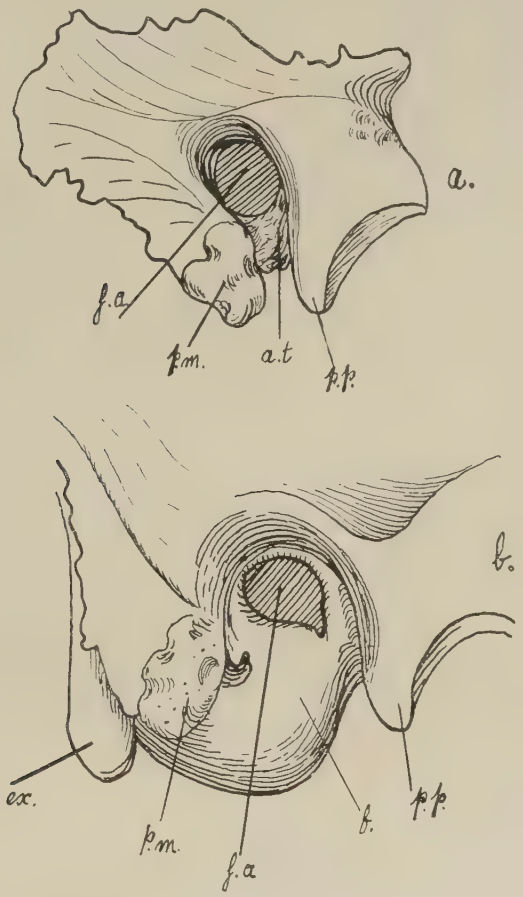


Fig. 5*a*. — Vista lateral de la región temporal de *S. bonaërensis* juvenil : *f. a., foramen auditivus externus; p. m., processus mastoideus; a. t., annulus tympanicus; p. p., processus postglenoidalis.* En la figura 5*b*, representa la misma región de *Felis leo*, perteneciente a un individuo no totalmente desarrollado. (En tamaño natural.)

diferencias que muestran, en esta región craneana, los dos géneros citados.

Vértebras. — Existen dos vértebras dorsales completas (fig. 6), y algunas en estado fragmentario; sus cuerpos están completamente se-

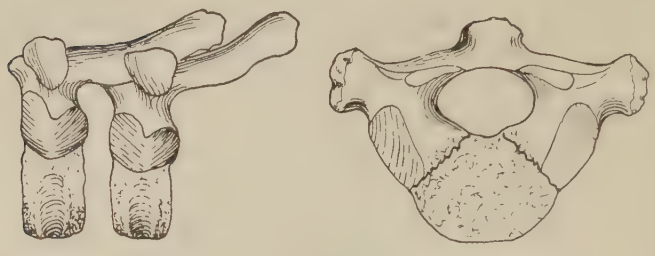


Fig. 6. — Vértebras dorsales vistas de lado y de adelante, respectivamente
(En tamaño natural)

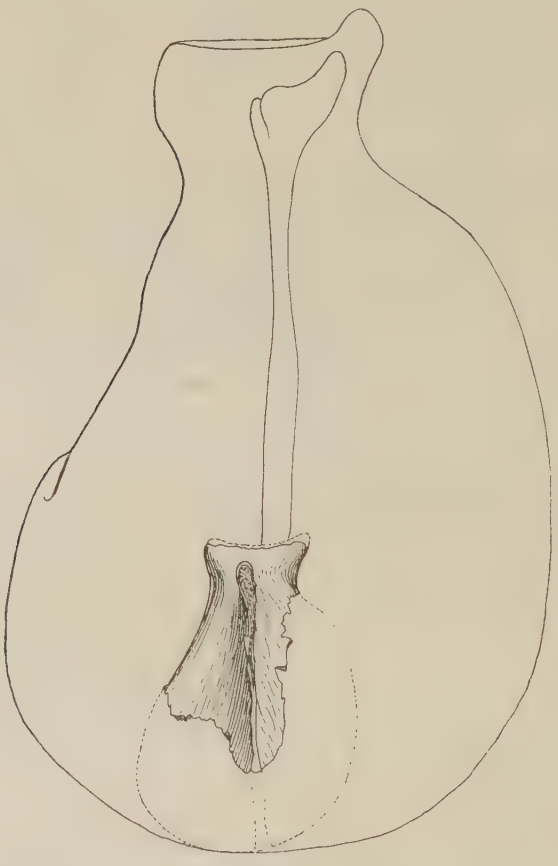


Fig. 7. — Escápulas de *Smilodon bonaërensis* en sus dos estados del desarrollo : joven y adulto. ($^1/_3$ del tamaño natural)

Medidas de las diferentes piezas del cráneo y esqueleto del individuo juvenil y las de « Smilodon bonaërensis » (tipo)

Medidas en milímetros	*Smilodon bonaërensis* (ejemplar joven)	*Smilodon bonaërensis* (ejemplar adulto, tipo)
Longitud palatal	84	168
Distancia entre la punta del premaxilar hasta el margen anterior de la órbita	60	130
Longitud del maxilar desde el nivel alveolar del canino hasta su extremo superior	80	148
Ancho de los maxilares sobre la pared externa de los caninos.	57	117
Ancho máximo de los premaxilares delante de los caninos...	43	83
Abertura transversal de la fosa nasal	18	65
Diámetro vertical del agujero infraorbitario	10.5	28
Diámetro transverso	6	19
Distancia entre los bordes externos de las cavidades glenoideas.	100 apr.	200
Ancho máximo del rostro al nivel del p^3	93	148
Longitud del diastema precanino	6	12
Longitud del diastema postcanino	8	16
Dientes		
i^1, mayor diámetro medido en la base coronaria	4	12
i^2, mayor diámetro medido en la base coronaria	6	13.5
i^3, mayor diámetro medido en la base coronaria	7	15
Canino, diámetro anteroposterior	17	45
Canino, diámetro transverso	7.5	22
p^3, diámetro anteroposterior	24	15
p^3, diámetro transverso	8	9.5
p^4, diámetro anteroposterior	7	42.5
p^4, diámetro transverso	7	16
Distancia desde el borde alveolar del i^1 hasta el margen alveolar posterior del p^4	77	152
Distancia desde el borde alveolar anterior del canino hasta detrás del p^4	56	114
Ancho del paladar entre las márgenes internas de los alvéolos caninos	36	68
Vértebra dorsal (7° u 8°)		
Longitud anteroposterior del cuerpo	9	43
Ancho máximo entre las diapófisis	43	96
Longitud de la neuroapófisis desde el margen anterior de la zigapófisis	34	135
Altura de la vértebra (adelante)	28	58

parados del arco neural; los discos intervertebrales óseos tampoco se hallan unidos. Las facetas articulares anterior y posterior, para el *caput* de las costillas están íntimamente unidas a esa edad y su sección recuerda la figura de una «V». Cuando la vértebra de los individuos adultos adquiere paulatinamente más desarrollo, dichas facetas también se hallan alejadas entre 1 y 2 centímetros, según sea la vértebra que se examina. Las epífisis correspondientes a las apófisis transversas han caído.

Fig. 8. — Costilla. (En tamaño natural)

Escápula. — Se conserva la parte distal con la cavidad glenoidea algo deteriorada; su anchura máxima es de 42 milímetros y de 36 el cuello escapular; en el individuo adulto, 98 y 76 respectivamente. Véase en la figura 7 las magnitudes de estos huesos en sus dos diferentes estados de desarrollo.

Costillas. — La costilla más larga mide 80 milímetros (fig. 8); el diámetro máximo de su cuerpo tiene 8 y el menor 5 milímetros.

Conclusión. — Aun cuando no se puede saber la longitud que debió tener el esqueleto del animal juvenil, puedo decir, sin embargo, que no excedía de la talla de un pequeño puma americano; pues, la distancia entre las extremidades inferiores de la séptima u novena costilla, miden solamente 150 milímetros, mientras las del esqueleto armado alcanzan a 385 y 460 al nivel de la oncena costilla.

BIBLIOGRAFÍA

Ameghino, F., *Contribución al conocimiento de los mamíferos fósiles de la República Argentina,* en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba,* volumen VI, Buenos Aires, 1889.

— *Sobre dos esqueletos de mamíferos fósiles armados recientemente en el Museo Nacional,* en *Anales del Museo de Historia Natural de Buenos Aires,* volumen XVI, Buenos Aires, 1907.

Burmeister, G., *Fauna argentina. Lista de los mamíferos fósiles del terreno diluviano,* en *Anales del Museo Público,* volumen I, Buenos Aires, 1864.

— Véase también en *Abhandlungen der Naturforschenden zu Halle,* volumen X, 1867.

Gervais, H., y Ameghino, F., *Los mamíferos fósiles de la América meridional,* París-Buenos Aires, 1880.

Muñiz, F. J., *Descripción del «Muñifelis bonaërensis»,* en *La Gaceta Mercantil,* Buenos Aires, 9 de octubre de 1845.

BIBLIOGRAFÍA

Por C. C. D.

Carpenter, A., *Tous les assemblages. Toutes les méthodes d'apprêt des bois. Tous les façonnages.* Tres tomos (14 × 22) en 8°, de 102 páginas con 29 figuras cada uno. 25 francos el tomo, en Buenos Aires. Librería Béranger, París, 1930.

Al uso de los carpinteros, ebanistas, fabricantes de carros, parquetistas, toneleros, cedaceros, torneros y guitarreros están destinados estos tres libros. No son propiamente manuales sino colecciones ilustradas y cómodamente repertoriadas, con índices alfabéticos muy completos, en los que se indican habilidades, mañas y artificios profesionales coleccionados por el autor en su práctica del oficio o bien extraídas de periódicos pertenecientes a todas las nacionalidades.

Conférences d'actualités scientifiques et industrielles faites en 1930 au Conservatoire National des Arts et Métiers. X. Ribaud, G., *Températures des flammes. Rayonnement des gaz incandescents et des flammes;* XI. Cabannes, Jean, *Anisotropie des molécules. Effet Raman;* XV. Brillouin, L., *Les Statistiques Quantiques et leur application aux électrons libres dans les métaux;* XVI. Baldet, F., *La Constitution des Comètes;* XVII. Darmois, G., *La Structure et les Mouvements de l'Univers Stellaire.* Cinco folletos (16,50 × 25,50) respectivamente de 43 páginas con 14 figuras; 66 páginas, 12 figuras; 44 páginas, 7 figuras; 23 páginas, 2 figuras y 1 lámina; 16 páginas. Precios : 5, 8, 5, 5 y 3 francos. Librería Hermann y Cía., París, 1930.

Nos hemos referido ya, en números anteriores de los *Anales,* a estas conferencias de divulgación científica dadas por eminentes profesores universitarios franceses. Se trata, en este caso, de siete conferencias :

Las del profesor Ribaud, de la Facultad de Ciencias de Estrasburgo y director del Laboratorio de pirometría de la Fundación Edmundo de Rothschild, se ocupan : de la constitución de las llamas, del cálculo termodinámico

de la temperatura de las mismas; de la medida de dicha temperatura y de su distribución en los diversos puntos; de la influencia de la proporción de los gases en una llama; de la absorción de la luz por los gases; de la radiación de los gases incandescentes y del poder emisivo total; de la temperatura de radiación de una llama y de su medida directa; del poder emisivo total y de la temperatura de radiación de algunas llamas no iluminantes; de la radiación de las llamas iluminantes; de la introducción de partículas sólidas en una llama. Trae cuadros en los que constan los resultados obtenidos, así como buenas bibliografías.

Las conferencias del profesor Cabannes de la Facultad de Ciencias de Montpellier, después de una introducción, estudian sucesivamente: depolarización de la luz difusa; refractividades moleculares principales; birrefringencia eléctrica de los gases moleculares homopolares; moléculas heteropolares; determinación del momento permanente a partir de la constante dieléctrica; contralor general de la teoría en los casos de moléculas homo y heteropolares; moléculas de H^2S y SO^2; birrefrigencia eléctrica negativa; justificación del modelo de Langevin; influencia de los momentos atómicos inducidos; diámetros atómicos; la molécula NO; moléculas homopolares triatómicas; el carbono tetraédrico; formación de cadenas largas; dobles vínculos; moléculas de los ácidos grasos; cambio de la anisotropía molecular cuando se pasa del estado gaseoso al líquido; anisotropía de los átomos y de las moléculas en la mecánica quantista.

En la otra conferencia expone un estudio experimental del efecto Raman o sea de la aparición de varias rayas o bandas cuya posición en el espectro está determinada por la frecuencia de la radiación excitadora y la naturaleza química del medio. Expone luego el estudio teórico. Llega a la conclusión de que, en general, la mecánica ondulatoria explica las reglas de selección y permite calcular radiaciones secundarias en los espectros de difusión.

La conferencia del profesor Brillouin, de la Sorbona, expone sucesivamente: las teorías estadísticas en física; período clásico; el no determinismo de la física quantista; celdas de extensión en fase; posición del problema estadístico; condiciones de degenerancia; la radiación isoterma considerada como gas de fotones; estadística de Bose-Einstein para este último; deducción de la fórmula de Planck; el electrón giratorio y el principio de exclusión de Pauli; estadística de Fermi y Dirac; la ley de repartición de las velocidades para los electrones; cálculos elementales sobre el gas fuertemente degenerado; los electrones libres en los metales y el calor específico de ellos; propiedades magnéticas del gas de electrones (Pauli); conductibilidades eléctrica y térmica de los metales.

El profesor Baldet, astrónomo agregado del Observatorio de París, después de señalar las dificultades especiales a las observaciones de los cometas, lo que explica la lentitud de las investigaciones en el dominio de la constitución de esos astros y de recordar ciertas generalidades, pasa a exponer lo

relativo al análisis espectral, señalando los distintos períodos : observaciones visuales fotográficas ; prisma-objetivo.

Las conclusiones son, entre otras interesantes, que el núcleo debe estar constituído por un sólido, a manera de un enorme meteorito conteniendo tal vez gases ocluídos ; este núcleo puede encontrar la Tierra produciendo desastres locales, cosa que parece haber ya sucedido cinco o seis mil años atrás en el desierto de Arizona, cerca del Cañón del Diablo donde existe un enorme boquete circular de 1200 metros de diámetro y 180 de profundidad rodeado de miles de meteoritos ferrosos, pesando algunos hasta 770 kilogramos. Los gases no ejercían influencia, dado su estado de rarefracción. Trata luego de la fuerza repulsiva del sol ; de la luminiscencia de los gases de los cometas y de la resonancia óptica. Acompaña una hermosa lámina fuera de texto, relativa a los espectros de cometas obtenidos con el prisma-objetivo por A. de La Baume-Pluvinet y F. Baldet.

En cuanto a la conferencia del profesor Darmois de la Facultad de Ciencias de Nancy expone : la vista estadística ; unidades ; los caracteres de los individuos en la población estelar ; estrellas variables ; cefeides ; el problema de la estructura ; la correlación de las cefeides ; el sistema de cúmulos globulares según Shapley ; los resultados de Seares ; el cúmulo local ; los grupos móviles ; la repartición de las velocidades ; las grandes velocidades ; la rotación de la galaxia ; los resultados de Mineur.

HANFFSTENGEL, JORGE VON. *Le Transport et la Manutention mécaniques des matériaux et marchandises.* Tomo III, versión de la 3ª edición alemana Jorge Lehr. Un tomo en 8° (16 × 25) ; 403 páginas con 431 figuras en el texto. Precio en Buenos Aires 106,50 francos. Librería Béranger, París, 1930.

En este tomo III, se estudia lo relativo al traslado de las cargas y aplicación de los cables en tornos, gruas y mecanismos de marcha. Los carros de transporte. Construcción y empleo de las gruas. Formas usuales y cálculo de los soportes. Gruas de cables. Instalaciones mixtas y transportes.

Se trata de un estudio teórico y práctico del tema para el uso de las fábricas, almacenes, canteras, minas, etc.

Al dar las noticias bibliográficas relativas a los tomos I y II (ver *Anales* t. CV, pág. 86 y t. CVII, pág. 335), hemos expuesto los motivos y la utilidad de esta obra y de su versión francesa.

En la confección del tomo III el autor Hanffstengel ha encargado a varios especialistas la redacción de los distintos capítulos :

Al ingeniero jefe A. Meres de Duisburgo los capítulos I a VIII que se ocupan de la construcción y del cálculo de las gruas de armazón rígido, así como de los cajones o canastos asidores y de los de los tornos. Al doctor ingeniero Werner-Franke de la Escuela Superior Técnica de Dresden, para el capítulo VIII, relativo a las gruas de cable. Al director de la Sociedad

J. Pohlig de Cologna-Zollstock Hermann Schmarje para el capítulo IX que trata de las instalaciones mixtas de transporte.

Gracias a esta colaboración la 3ª edición alemana de la obra que nos ocupa y que ha servido para la versión francesa hecha por el ingeniero Jorge Lehr, ex-alumno de la Escuela Politécnica, ofrece una presentación original con capítulos enteramente nuevos y un total puesto en armonía con el estado actual de la técnica. El contenido de esos capítulos nuevos compuestos por el ingeniero Meves es el siguiente :

Forma usual de las armazones : Generalidades. Gruas sobre vía alta. Puentes transbordadores. Gruas de placa giratoria. *Cálculo de las armazones :* Consideraciones. Fundamentos del cálculo; formas exteriores, fatiga de la materia. Ejemplos : Viga calderada a alma llena portadora de un carrito con dos ruedas o dos carritos con cuatro ruedas. Viga de enrejado sobre dos apoyos con cuatro ruedas. Viga de brazo fijo recorrido por una grua giratoria. Viga de brazo levantable. Apoyo en pórtico. Grua giratoria de brazo levantable. Vigas descansando sobre varios apoyos. En el capítulo IX citaremos también lo relativo a los transportes de abastecimientos de salas de calefacción de fábricas industriales y de las centrales eléctricas próximas o alejadas de los sitios de extracción. Transporte en las fábricas de gas o de coke, etc.

Pascal, Paul, *Synthèses et Catalyses Industrielles*, 2me édition. Un tomo en 8° (16,5 × 25), II + 456 páginas. Precio 70 francos. Hermann y Cía., París, 1930.

La circunstancia de que se desarrollen cada vez más los métodos de síntesis por catálisis, justifica esta segunda edición de la obra del distinguido profesor de la Sorbona.

Y, efectivamente, las fabricaciones de los derivados del azufre, del ázoe y del cloro, ya sea para la preparación de los ácidos sulfúrico, nítrico o clorhídrico, ya para la del cloro y del hidrógeno, ya para la síntesis del amoníaco, exigen una pureza especial de los cuerpos que intervienen, así como una regulación minuciosa de las condiciones termoelásticas o topoquímicas de las reacciones y sólo pueden ser estudiadas y comprendidas a la luz de la físico-química moderna.

El libro del profesor Pascal es el resultado de una combinación bien equilibrada entre el estudio teórico completo de las reacciones y la descripción detallada y razonada de los puntos esenciales de la fabricación.

Consta de tres partes. La primera se refiere al problema del ázoe; industria del ázoe amoniacal; del ácido nítrico y fabricación concentrada de este último. La segunda trata de la industria del ácido sulfúrico. La tercera, de la industria del cloro y del ácido clorhídrico.

ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS

FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES

LES ANGLES ET LES ROTATIONS « IMAGINAIRES » [1]

TROISIÈME CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE VECTORIELLE [2]

PAR C. C. DASSEN

Docteur ès sciences

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé les notions familières relatives aux angles et aux distances, ainsi que la généralisation succesive de ces notions par l'introduction, dans l'analyse, des nombres dits « complexes », « imaginaires », ou « *diplets* de nombres *réels* »; l'auteur expose sa manière d'objectiver ces notions ainsi généralisées, au moyen de la représentation graphique qu'il a indiqué et employé dans les deux chapitres précédents. Après avoir rappelé aussi, ce qui correspond à la fonction linéaire la plus simple, il aborde la fonction circulaire, également la plus simple, et indique des représentations graphiques relatives à ces fonctions en supposant, d'abord, que le coefficient angulaire de la fonction linéaire est de nature vectorielle à deux unités capitales, tandis que les abscisses sont à une unité capitale; puis, le cas inverse; puis, que le coefficient et les abscisses soient vectoriels à deux unités. Dans le premier cas, la représentation est constituée par un faisceau de droites de centre à l'origine des coordonnées; dans le second cas, par un faisceau de plans cotés passant tous par la droite perpendiculaire au plan de base tracée par l'origine des coordonnées; dans le troisième cas, par un faisceau de plans cotés passant tous par l'origine des coordonnées. Faire tourner d'un certain angle ce faisceau, signifie changer chaque plan par un autre du même faisceau d'après une certaine loi générale, ainsi que les cotes. Tout plan est changé, sauf deux toujours les mêmes, invariables par la règle en question : ce sont ceux qui représentent les droites isotropes.

Quant à la fonction circulaire, si les abscisses sont réelles et le rayon « imaginaire » elle est représentée par l'intersection d'un hyperboloide de révolution et d'un certain cylindre hyperbolique. La rotation d'un point de cette ligne le transporte le long d'elle même : cette courbe est asymptotiquement fermée aux points

(1) Étude presentée à l'Académie dans sa séance du 19 novembre 1927.

(2) Voir *Annales*, tome CVI, page 359, et tome CVIII, pages 353 et 447.

cycliques. Quand le rayon est « réel » et les abscisses « imaginaires », ou quand l'un et l'autre sont des « diplets » à deux unités capitales, l'auteur obtient comme représentation graphique de très curieuses surfaces cotées le long desquelles dans les rotations, se deplacent, en changeant aussi les cotes, les points cotés de ces surfaces. Finalement, l'auteur indique ce que l'on doit comprendre par la rotation d'un point de coordonnées complexes, d'un angle également complexe.

I

RAPPEL DE NOTIONS COURANTES

80. Les notions de « droite », de « plan », de « rotation », de « longueur », de « distance », de « circonférence », d'« angle ». sont toutes entièrement familières. Quand on parle d'une droite on se représente l'image d'un fil étiré, ou d'un rayon de lumière. Nous comprenons parfaitement aussi ce que l'on veut exprimer quand on dit qu'un segment de droite, qu'un arc de courbe, a telle ou telle étendue; qu'une voie ferrée a plus ou moins de longueur qu'une autre. S'il s'agit d'un plan, notre imagination se représente la surface lisse d'une table, ou d'un tableau. Nous savons bien ce que veut dire ouvrir plus ou moins une porte, faire plus ou moins tourner les aiguilles d'une montre. La géométrie donne de la rigueur à toutes ces notions familières, soit dans leur définition, soit dans leur mesure ou détermination quantitative.

81. Si nous considérons toutes les droites d'un plan passant par un même point (un faisceau plan de droites) nous savons parfaitement bien ce que l'on veut dire par faire tourner dans un sens ou dans l'opposé une de ces droites autour du point commun en question (centre du faisceau); et notre imagination voit sans effort que la droite mobile, en tournant dans un sens donné, se confond succesivement avec toutes les autres droites du faisceau; et nous nous rendons bien compte que la quantité de rotation (moindre d'un demi tour) nécessaire pour porter la droite mobile, depuis la position première ou initiale qu'elle avait avant la rotation, jusqu'à celle où nous l'avons portée, ne depend que de ces deux positions. Cette quantité de rotation est bien précisée par la paire de droites considérée du faisceau, car une augmentation ou diminution de cette quantité, toujours dans le sens établi, conduirait la droite mobile à une autre position différente de la précédente. Nous n'avons donc aucune difficulté à envisager cette quantité comme quelque chose de parfaitement determinée

par les deux droites considérées : c'est l'*angle* de ces deux droites pour le sens supposé de la rotation; si ce sens change, l'angle des deux droites ne sera généralement pas égal à l'antérieur, mais, sauf indication contraire, il est convenu que celui que l'on doit considérer est le plus petit des deux. Il en arrivera de même si, au lieu de droites, on considère des rayons partant d'une origine commune (faisceau de rayons); seulement, le plus grand de ces deux angles est toujours plus grand qu'un demi tour.

82. Du reste, on peut imaginer que la droite mobile continue à tourner dans le sens établi, elle repassera alors par la droite fixe à chaque augmentation de rotation d'un demi tour. S'il s'agit d'un rayon mobile, cela arrivera à chaque augmentation d'un tour.

Si on considère des droites orientées ou affectées d'un verseur (figs. 28 et 29), les coïncidences devront alors se faire de manière a conserver le même verseur; le cas retombera evidemment dans celui des rayons.

83. Et si nous associons à la notion de « rotation » celle de « distance », nous pouvons faire correspondre au faisceau de rayons, la circonférence décrite par un point d'un de ces rayons quand ce dernier fait un tour complet; de même que nous pouvons faire correspondre à l'angle de deux rayons, l'arc de cette circonférence, compris entre ces deux rayons, ou côtés, de l'angle considéré (arc décrit par un point d'un de ces côtés quand on le fait tourner pour le porter sur d'autre et déterminer ainsi l'angle envisagé). On découvre aussitôt une proportionnalité entre les grandeurs des angles et celles de leurs arcs correspondants ainsi considérés, la grandeur du rayon devant, naturellement, être tenue aussi en considération.

84. La théorie des triangles semblables nous conduit ensuite à definir des « fonctions trigonométriques » d'un angle α, soient : sinus α, cosinus α, tangente α; et à établir des rapports entre elles, et à étudier aussi leurs variations d'après les variations de l'angle. À l'aide de figures traçées sur un tableau, par exemple, on suivra des raisonnements qui conduiront, entre autres, aux rapports bien connus,

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \tag{1}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{tang}^2\alpha}} \tag{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}} \tag{4}$$

$$\operatorname{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha \pm \operatorname{tang} \beta}{1 \mp \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta}. \tag{5}$$

Les radicaux pouvant être pris avec le signe positif ou le négatif.

85. La théorie de la circonférence et des polygones inscripts ou circonscripts, nous conduit ensuite à construire, terme à terme, la série (le nombre « irrationnel ») designée en abrégé par π, et qui, par la fiction du postulat dit « des limites ». est sensée représenter la « longueur rectifiée » de la circonférence, celle du diamètre étant prise pour unité de mesure. Si c'est le rayon qui est pris comme unité, la « longueur rectifiée » de la circonférence sera donc 2π.

86. Considérons le faisceau de rayons de centre O, ainsi que la circonférence c de même centre, et rayon $\overline{OM}$; elle détermine l'arc $\overset{\frown}{MR}$ correspondant à l'angle α de deux rayons OM et OR; la proportionnalité entre les angles et leurs arcs correspondants, nous permet d'établir :

$$\frac{\overset{\frown}{MR}}{\text{circonférence entière}} = \frac{\alpha}{\text{angle d'un tour entier}}$$

donc

$$\frac{\overset{\frown}{MR}}{2\pi\overline{OM}} = \frac{\alpha}{\text{angle d'un tour entier}}$$

de sorte que si l'on convient d'exprimer l'angle d'un tour entier par la susdite série 2π, on aura numériquement

$$\frac{\overset{\frown}{MR}}{\overline{OM}} = \alpha.$$

87. Cette convention revient, donc, à établir que l'angle d'un huitième de tour doit être exprimé par $\frac{\pi}{4}$; comme la tangente de cet angle est égale à 1, cela revient à dire que l'angle de tangente unitaire doit être exprimé par $\frac{\pi}{4}$.

88. Si après avoir convenu tout cela, on applique aux fonctions trigonométriques et aux angles la théorie des fonctions derivées et des développements en séries convergentes (de Maclaurin) on obtient

comme expression d'un angle non supérier à un huitième de tour, en fonction de sa tangente (et d'accord aux conventions établies au numero précédent), la suivante :

$$\alpha = \operatorname{tang}\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{3} + \frac{\operatorname{tg}^4\alpha}{5} - \ldots\right). \tag{7}$$

89. Pour un angle compris entre un huitième et un quatrième de tour $\left(\text{auquel angle correspond une expression de valeur comprise entre } \frac{\pi}{4} \text{ et } \frac{\pi}{2}\right)$, sa tangente étant alors de valeur arithmétique supérieure a 1, la série antérieure ne serait plus convergente; mais il suffirait de considérer l'angle complémentaire qui, lui, à sa tangente égale à la réciproque $\frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$ de celle, tang α, de l'angle donné. On aura alors :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\left(1 - \frac{1}{3\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{5\operatorname{tg}^4\alpha} - \ldots\right). \tag{8}$$

L'une ou l'autre de ces deux séries sert, donc, à exprimer l'angle en fonction de sa tangente supposée connue [1]. On peut aisément vérifier que pour tang $\alpha = 1$, c'est-à-dire, pour l'angle d'un huitième de tour, tant (7) que (8) établissent comme expression de l'angle, qui, comme nous le savons est $\frac{\pi}{4}$, la série convergente :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

90. On obtient de même

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots \tag{9}$$

$$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} - \ldots \tag{10}$$

Le quotient de ces deux dernières fournit tang α en fonction de α.

91. Il est également bien sû que si l'on applique la méthode de

[1] Si on donne aux rotations, et par conséquent aux angles, un caractère algébrique, c'est-à-dire, si à leur valeur arithmétique on ajoute un signe de direction (rotation positive ou negative) puisque l'on peut considérer deux sens opposés aux rotations (n° 81), il résulte qu'un angle aigu négatif, a une tangente négative. Les deux séries (7) et (8) donnent alors deux valeurs à l'angle : l'une positive, l'autre négative, selon que tang α soit positive où négative.

Descartes à l'étude des figures, c'est-à-dire, si l'on prend, dans le plan, une paire d'axes orthogonaux de coordonnées, l'axe des x, et l'axe des y; et si l'on fixe, à partir de leur intersection O, des directions positives et négatives aux axes en question; x et y étant les distances, qualifiées d'un signe positif ou négatif, d'un point du plan, respectivement à l'axe des y et à l'axe des x, on trouve que tous les x et les y relatifs aux points d'une même droite du plan, sont liées par la relation de nature algébrique (vectorielle à une unité capitale) :

$$ax + by + c = 0,$$

a, b, c, étant trois constantes dont les rapports $a : b : c$ sont caractéristiques, c'est-à-dire, différents pour chaque droite du plan. En particulier, les droites du faisceau qui ont centre à l'origine des coordonnées, remplissent la condition,

$$y = mx.$$

92. À chaque valeur de m, qualifié d'un signe positif ou négatif, correspond une seule droite du faisceau; et vice-versa. Cette valeur, $m = \frac{y}{x}$, rapport constant entre l'ordonnée et l'abscisse du point de la droite considérées est son *coefficient angulaire* ou la valeur de la *tangente trigonométrique* de l'angle α, moindre d'un demi tour, que détermine la droite en question avec la direction positive de l'axe des x. Soit, figure 27 : Ox, l'axe des x; Oy, celui des y; O, le centre du faisceau et origine des coordonnées; r, une droite quelconque du faisceau; α, l'angle, moindre d'un demi tour, que forme r avec la direction positive de l'axe des x; P, un point quelconque de r; $\overline{PM}$, son ordonnée y, $\overline{OM}$, son abscisse x. La définition donnée permet, donc, d'écrire,

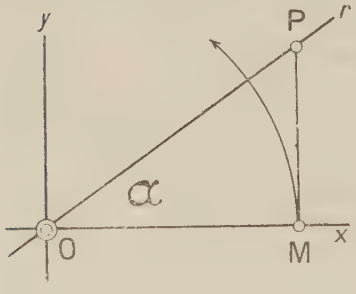


Figure 27

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{OM}} = \frac{y}{x} = m = \text{tang } \alpha. \qquad (11)$$

93. S'agissant ici d'une droite r à laquelle on n'assigne pas de verseur, nous avons rappelé au numero 82, que la valeur, positive ou négative, obtenue pour l'angle α au moyen des séries (7) ou (8) peut être augmentée d'un multiple (entier) de demi-tours (c'est-à-dire de π).

Mais si on assigne des verseurs à la droite, c'est-à-dire, si l'on distingue les deux rayons opposés qui constituent la droite, alors la connaissance de m ne suffirait pas pour les distinguer; le premier étant α, l'autre serait $\alpha + \frac{\pi}{2}$; une fois l'un ou l'autre fixé, ou pourrait, d'après ce qui a été observé au numero 82 (voir figures 28 et 29), augmenter celui qui correspond au verseur adopté, de multiples (entiers) de 2π.

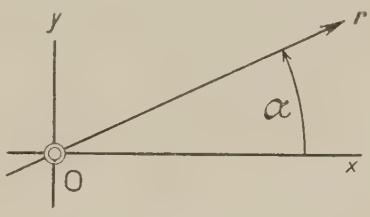


Figure 28

94. Mais comme les radicaux qui figurent dans les formules (3) et (4) peuvent être pris avec signe positif ou négatif, les règles du calcul conduisent à prendre le signe positif pour exprimer l'angle aigu de la figure 29, et le négatif pour l'obtus, qui vaut $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la connaissance du signe du sinus ou du cosinus permet de déterminer le verseur de la droite r, verseur qui, comme il a été observé plus haut, ne résulte pas déterminé par la seule connaissance de m.

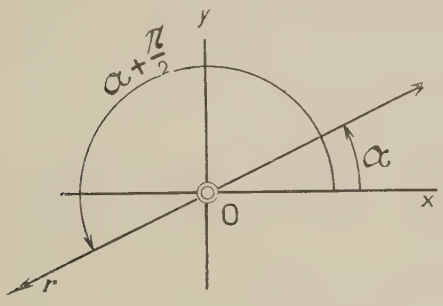


Figure 29

95. Rappelons maintenant les définitions analytiques relatives aux distances. Deux points étant définis par leurs coordonnées: x_1, y_1; x_2, y_2, leur distance d est définie par l'expression

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (12)$$

S'il s'agit de la distance d'un point P de coordonnées x, y, à l'origine O, nous aurons

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (13)$$

Le sinus et le cosinus de l'angle α que forme la droite OP avec la direction positive de l'axe des x, sont donnés par les rapports bien connus

$$y : d; \qquad x : d,$$

et la distinction des angles se fait en fixant un signe a d, c'est-à-dire, au radical $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si la direction assignée à la droite r, est celle de la

figure 28, c'est le signe positif qui correspondra; si c'est celle de la figure 29, il lui correspondra le signe négatif.

96. S'il s'agit d'une droite quelconque du plan, on aura, évidemment,

$$\sin \alpha = \frac{y_2 - y_1}{d}; \qquad \cos \alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (14)$$

Le signe dépendra du verseur; la parallèle, de même verseur, à la droite considérée, traçée par l'origine des coordonnées, fera disparaître toute difficulté quant à la détermination de ce signe. Du reste, comme il a été déjà observé, que l'on tienne ou non compte des verseurs, deux droites parallèles ont toujours même coefficient angulaire, c'est-à-dire, même m ou même valeur de tang α.

97. Tout cela rappelé, rappelons encore, en l'exposant le plus clairement qu'il nous sera possible, la généralisation que le progrès scientifique a introduit dans ces questions. Ce progrès a été réalisé dans le domaine analytique, où, quand il ne s'agit que d'une spéculation *purement formelle,* aucune image des sens n'est invoquée. Ainsi, l'équation $ax + by + c = 0$, quoique toujours dite «.de la ligne droite », sera en fait, définie formellement comme « l'ensemble des paires de valeurs x, y, qui remplissent cette condition » sans se préoccuper de l'image d'un fil étiré.

On pourrait en dire de même pour l'équation

$$y^2 = r^2 - x^2, \qquad (15)$$

qui correspond à une circonférence; ou de toute autre équation.

98. Au premier abord, ces observations semblent des subtilités inutiles, puisque au fond, dans le domaine des grandeurs algébriques (c'est-à-dire vectorielles à une unité) cela revient au même, que l'on considère, par exemple, la ligne droite d'une façon ou d'une autre. Mais il est aisé de voir que cette distinction est, au contraire, très importante. Ainsi, si pour représenter la droite, au sens courant, on emploie des coordonnées homogènes, en faisant $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$, l'équation prend la forme $aX + bY + cZ = 0$. Si nous prenons la définition de droite comme répondant à l'image d'un fil étiré, on ne peut pas faire $Z = 0$ car, dans $ax + by + c = 0$, on ne peut remplacer x et y par $\frac{X}{O}$ et $\frac{Y}{O}$, qui sont des non-sens; tandis que, dans $aX + bY + cZ = 0$,

X, Y, Z, remplissent des rôles entièrement identiques, de sorte que si l'on peut annuler X et Y (ce qui correspond à l'annulation de x et y dans l'autre équation et peut être fait sans aucun inconvénient), on peut analytiquement annuler, de même Z dans cette seconde équation.

Dans le cas du fil étiré, l'annulation de x donne $\left(-\frac{c}{b}\right)$ comme valeur correspondante de y, et l'annulation de y fournit comme valeur correspondante de x, $\left(-\frac{c}{a}\right)$, ce qui signifie que le fil étiré passe par les points du plan qui ont ces coordonnées, le premier de ces points appartenant à l'axe des y, l'autre à l'axe des x.

99. Dans l'autre cas il nous faudra considérer comme « ligne droite » la classe, ou système de trois valeurs non toutes nulles, X, Y, Z (systèmes de points) remplissant la condition $aX + bY + cZ = 0$; et comme cette équation est homogène, l'annulation de Z n'offre analytiquement aucune particularité et peut être envisagée au même titre que celle de X ou de Y. Il y a donc généralisation car, à tout système de valeurs de X, Y, Z (Z n'étant pas nul) correspond le cas relatif à la première équation, c'est-à-dire, un point de l'image objective de la droite; mais, à présent, il correspond aussi un point, même quand Z est nul. Pour l'image sensible, les conditions $x = 0$, $y = 0$, qui correspondent aussi à $X = 0$, $Y = 0$, représentent les axes des coordonnées (l'axe des y et des x respectivement); en revanche $Z = 0$ ne peut représenter aucune droite du plan. Pour le formalisme, au contraire, $Z = 0$ représente une droite au même titre que $X = 0$ et que $Y = 0$; car ici on n'invoque aucune figure, aucune image sensible. Pour abréger le langage, il a été convenu de désigner cette droite du formalisme par le nom de « droite à l'infini » ou « droite impropre » du plan, voulant par là concilier, la déduction analytique avec l'image objective du plan. On dira, de même que, pour des valeurs déterminées, non à la fois nulles, de X et de Y, on aura un point « impropre » ou à « l'infini » du plan; les point « impropres » appartiendront donc à la droite « impropre » et l'on obtiendra ainsi un langage, fictif, mais parfaitement cohérent. Seulement, que l'on s'entende bien : le fait de donner des noms à des entités purement formelles, ne signifie nullement pas leur existence objective; mais ces fictions rendront tout de même de nombreux services à l'étude des figures objectives, tant par la simplification de langage, que parce qu'il existe des transformations où interviennent des cas limites dont l'équivalent analytique correspond justement à ces valeurs nulles de la coordonnée Z.

100. Dans le cas de l'équation (15) de la circonférence, ces dernières considérations semblent ne pas devoir intervenir; mais, en revanche, on peut observer que, dans cette équation, si l'on donne à x des valeurs arithmétiquement plus grandes que r, aucune valeur de y ne peut plus y satisfaire. Or, dans le formalisme, cela peut s'éviter en adoptant une autre definition de la circonférence après avoir defini ce que nous appellerons, en abrégé, *diplets* de quantités ou de nombres; et qui, ordinairement, est connu sous de nom le *quantités et nombres complexes* ou *imaginaires* et que l'on peut aussi dire « vectoriels à deux unités capitales ». Rappelons brièvement ce qui, du point de vue entièrement formel, constitue le fondement de cette généralisation.

101. L'analyse peut, sous ce point de vue, se construire entièrement avec la notion unique de nombre entier. La considération de « paires » de nombres entiers remplacera, par construction formelle, la théorie de ce, qu'objectivement, on nomme *nombres fractionnaires.* Cette théorie des « paires » comprendra celle des nombres entiers comme cas particulier : il suffira de supposer que le second nombre de la « paire » soit le nombre 1. On definira ce que l'on entendra par *égalité* de deux « paires »; par somme ou différence de deux « paires »; par produit ou quotient de deux « paires », etc. Cette théorie purement formelle des paires, pourra s'appliquer aux quantités objectives quand il sera possible de faire des spéculations sur le partage de l'unité de mesure. On pourra, ensuite, suivant la même voie, définir les *quantités ou nombres algébriques,* ou *qualifiés,* ou *dirigés suivant deux directions opposées* ou *vectoriels à une unité capitale.* On considérera pour cela des « couples » de nombres entiers ou fractionnaires (des « paires »), et l'on définira leur égalité, leur somme, leur produit, etc.; et les résultats pourront ensuite s'interpréter objectivement chaque fois que l'on aura à considérer des grandeurs qui, par leur nature, ont besoin, pour être entièrement déterminées, de la connaissance, non seulement de leur détermination arithmétique, mais aussi d'une direction dans l'une ou l'autre de deux sens opposés. On dira, ensuite, que l'ensemble de nombres entiers, de « paires » et de « couples », constituent les nombres « rationnels ». Il faudra introduire des fictions et la notion de « limite mathématique » pour établir les nombres « irrationnels ». Du point de vue formel cette notion de limite repose sur celle de « l'infini » qui se reduit à dire que, « après un nombre entier il y en a toujours un autre ».

102. Même si l'on s'arretait ici, on pourrait déjà exposer d'une ma-

nière formelle, c'est-à-dire sans invoquer aucune image sensible, la théorie des angles. En effet, après avoir défini la ligne droite comme il a été dit plus haut (n° 99) par l'expression $ax + by + cz = 0$, les droites particulières $x = 0$ et $y = 0$ définiront les « axes de coordonnées »; le « centre » sera le point $\{ x = 0, y = 0 \}$. Les droites passant par ce point auront alors toutes une équation du type $y = mx$. A chaque valeur de m correspondra une droite du « faisceau » de centre O. On definira m comme étant le « coefficient angulaire » de la droite r considérée, toutes les lettres signifiant des nombres rationnels ou irrationnels, tels que l'on vient de les definir (n° 101). Une droite telle que $y = mx + n$ sera dite « parallèle » à $y = mx$. « L'angle » α, de la droite $y = mx$, ou de ses parallèles, avec l'axe des x ($y = o$) sera defini par l'une ou l'autre des séries convergentes (7) ou (8) selon que l'on ait $m < 1$ ou $m > 1$, m sera definie comme « la *tangente* » de l'angle α ($m = \text{tang}\,\alpha$).

On fixera un verseur à chaque droite en assignant les signe + ou — aux radicaux des valeurs (3) ou (4), qui seront définis comme le sinus et le cosinus de l'angle α. Ou bien, après avoir defini la « distance » de deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) donnés de la droite a, par la valeur (12), et par conséquent, comme distance d'un point (x, y) de la droite considérée à l'origine O, la valeur d de la formule (13), on fixerait, dans les formules (14), qui sont équivalentes aux (3) et (4) $\left(\text{puisque } m = \frac{y}{x}\right)$, un signe à d.

103. Mais si l'on voulait faire du formalisme avec des formules telles que la (15) dans le cas ou $x > r$, on se trouverait arrêté. Voici comment on peut sauver cet obstacle.

104. Désignons par nombres « réels » l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels; considérons l'ensemble ou « diplet » de deux nombres réels a et b, pris dans cet ordre et représenté par le symbole (a, b); le « premier » a, de ces nombres étant toujours différencié et irréductible au « second » b. Nous dirons : le *diplet* (a, b). On conviendra que deux diplets (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont égaux, et l'on ecrira $(a_1, b_1) \equiv (a_2, b_2)$ quand, et seulement alors, on a $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. La somme et la différence de ces deux diplets sera defini comme étant les diplets $(a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$; par conséquent, la module de cette opération est le diplet (0, 0), nommé quelque fois « cero imaginaire ».

Le produit de deux diplets (a_1, b_1), (a_2, b_2) sera defini comme étant le diplet $(a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 + b_1a_2)$. De la découlera la définition de

quotient de deux diplets, et de puissance ou racine d'un diplet. Ainsi, on aura :

$$(a, b)^2 \equiv (a^2 - b^2, 2ab).$$

105. On voit aisément que les propriétés commutatives, associatives, uniformes, de l'addition et de la multiplication sont conservées comme cela a lieu pour les opérations homonymes relatives aux nombres entiers. Il en arrive de même pour la propriété distributive de la multiplication par rapport à l'addition, etc. Le facteur (0, 0) annule un produit, et réciproquement, un produit ne peut être (0, 0) que si un des facteurs est ce même cero imaginaire ou diplet nul.

L'on a $(a, b)\,(a', 0) \equiv (aa', ba')$, exactement comme l'on a $(a + b)\,a' \equiv aa' + ba'$; et, d'une façon générale, on peut vérifier que, si le second composant d'un diplet est nul, ce diplet se conduit comme un nombre réel; cette observation indique que les opérations effectuées avec des diplets, comportent, comme cas particulier, celles effectuées sur les nombres réels. On peut donc considérer tout diplet de la forme $(a, 0)$ comme équivalent au nombre réel a. Et puisque l'on a $(a, b)\,(1, 0) \equiv (a, b)$, on peut dire que le diplet (1, 0) est le module de la multiplication de diplets; et d'après ce que nous avons observé, ce diplet module est équivalent au nombre réel 1.

106. Du produit $(a, b)\,(0, 1) \equiv (-b, a)$, et de $(0, 1)\,.\,(0, 1) \equiv (-1, 0) \equiv -1$ il en ressort que le carré du diplet (0, 1) est le nombre réel, -1, et puisque l'on a aussi $(a, b) \equiv (a, 0) + (0, b)$, il résulte que tout diplet peut être considéré comme la somme d'un nombre réel a avec un autre imaginaire « pur » tel que $(0, b)$; et, aussi, que tout nombre imaginaire « pur » $(0, b)$ peut être réduit à l'unité imaginaire (0, 1) puisque l'on a $(0, b) \equiv (0, 1)\,b$. Si l'on désigne cette unité imaginaire, ou seconde unité capitale, par la lettre i, afin d'abrégér l'écriture, on peut, en somme, écrire tout diplet o nombre « imaginaire » ou « vectoriel » à deux unités capitales (a, b) sous la forme ordinaire $a + bi$, a et b étant des nombres réels.

Donc, dans cette généralisation succesive de la notion de nombre [1],

[1] Il est évident que le formalisme constitue non pas la première mais plutôt le dernière étape de l'étude des grandeurs. Historiquement, la marche progressive de ces étapes a suivi un autre cours. Dans notre thèse *Metafísica de los conceptos matemáticos fundamentales*, etc., Buenos Aires, 1901; ainsi que dans notre *Étude sur les Quantités Mathématiques*, etc., Hermann, Paris, 1903, nous avons longuement traité ces questions, surtout au quatrième chapitre du premier de ces livres. Nous y avons commenté, du point de vue philosophique, les rapports entre l'expérience et les sciences exactes; et analysé la raison d'être de la mathé-

toutes les nouvelles définitions désignées sous le noms d'addition, soustraction, etc., quoique s'appliquant à des « paires » ou à des « couples » des nombres irrationnels, ou à des diplets, remplissent bien ce que Hankel a nommé la *conservation des règles formelles* ou des *propriétés combinatoires de ces opérations homonymes,* définies pour les nombres entiers. Dans le cas des diplets par exemple, le binôme $a+bi$ se conduira, dans les opérations, comme s'il s'agissait de la somme de deux nombres réels, c'est-à-dire, à une unité capitale; seulement il faudra remplacer le carré i^2, de la seconde unité capitale, par la valeur — 1, soit, par la première unité capitale affectée du signe négatif, car cette seconde unité capitale i ou unité imaginaire, est de diplet (0, 1) dont le carré est le diplet (— 1, 0), soit — 1.

107. L'introduction, dans les calculs, de diplets se manipulant d'après les règles précédentes, permet, entre autres choses, de réaliser certaines opérations qui étaient des non sens avec les nombres à une seule unité capitale (nombres réels). Ces opérations deviennent, à présent que l'on dispose de deux unités capitales, parfaitement exécutables, et cela nous ramène à considérer l'équation qui a servi de point de départ à ce rappel que nous avons fait de la théorie des diplets. Soit, donc, l'équation de la circonférence

$$y^2 = r^2 - x^2$$

qui n'a pas de sens quand x est, arithmétiquement, de valeur supérieure à r. À présent nous pouvons dire que, en supposant que r et x aient des valeurs réelles, on obtient toujours une valeur pour y, valeur qui est réelle tant que $x < r$, et qui est le diplet

$$(0, x^2 - r^2) \equiv (x^2 - r^2)\, i, \qquad \text{quand} \qquad |x| > r,$$

car le carré de ce diplet est bien, d'après ce que à été convenu plus haut, le nombre réel $r^2 - x^2$.

108. On fournit ainsi à l'analyse formelle des ressources prodi-

matique formelle ou idéale; thème, du reste, que d'autres auteurs ont profondement traité (citons, par exemple, G. Milhaud dans la préface de sa traduction de l'ouvrage de Paul du Bois Raymond sur la *Théorie générale des Fonctions).* On peut aussi examiner l'appendice de la deuxième de nos études citées plus haut. Nous ne discuterons pas de nouveau cette question. L'exposé de notre texte n'est autre chose, pour le moment, qu'une répétition de choses, certainement très connues, mais que nous avons cru devoir rassembler et exposer convenablement pour la plus parfaite intelligence du thème principal de ce travail; et aussi dans ce but de vulgarisation que nous avons tant de fois déjà invoqué.

gieusement fécondes. Mais il faudra voir comment pourra-t-on utilement appliquer les résultats obtenus et les interpréter du point de vue objectif. Il faudra prendre gare aussi à la terminologie, car si l'on continue de donner à certaines grandeurs, ou à certaines entités que l'on exprime au moyen de diplets, les mêmes noms que l'on a donnés à certaines autres qui nous étaient familières (parce que les dernières sont formellement des cas particuliers des premières), il pourra arriver que les résultats nous semblent absurdes, paradoxaux, fantastiques ou monstrueux si, oubliant l'extension donnée aux définitions ou aux termes, on ne se guide, pour aprécier ces résultats, que de l'image objective des entités homonymes de notre intuition.

109. Nous allons le voir en appliquant les diplets aux grandeurs rectilignes, aux grandeurs angulaires, et aux rotations. Nous chercherons à objectiver ensuite, autant que faire se pourra, les résultats obtenus. La commodité de l'écriture exige certaines simplifications, l'emploie de certains symboles conventionnels, à commencer par le symbole e^x; e, étant la valeur assignée, sur la base de la fiction dite « postulat analytique des limites », à la serie convergente

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots \tag{13}$$

110. On peut, si l'on veut, considérer tout simplement e comme indiquant cette série convergente sans se preoccuper du postulat des limites; seulement, par e^x, il faudra considérer la série qui résulte de soumettre la série (13) à une manipulation analogue à celle que l'on practique quand on elève un polynôme à une puissance déterminée. On a alors, en vertu du théorème de Maclaurin :

$$e^\alpha \equiv 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots \tag{14}$$

Or, si l'on compare les formules (9) et (10) du numero 90, qui définissent le sinus et le cosinus d'un angle α, avec la formule (14) précédente, on voit aisément que le diplet

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) \equiv \left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots, \quad \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^7}{7!} + \ldots\right) \tag{15}$$

prend exactement la forme de (14) quand, dans cette dernière, on remplace α par le diplet $(o, \alpha) \equiv \alpha i$.

111. Nous pouvons, donc, représenter le diplet (15) par l'expression $e^{(0,\alpha)}$, ou $e^{\alpha i}$, et écrire

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + \sin\alpha \,.\, i. \tag{16}$$

Seulement, il faudra interpréter cette dernière expression en disant que le diplet du second membre, *définit* le sens de l'exposant qui figure dans le premier; cet exposant devient un *indicateur* qui a pour objet de simplifier l'écriture *en conservant les règles formelles du calcul* (le principe de Hankel); car en effet, si l'on applique la règle de la multiplication des diplets (n° 104), et l'on tient compte des formules de la trigonométrie qui expriment les developpements de $\cos(p \pm q)$ et $\sin(p \pm q)$, en fonction de $\sin p$, $\sin q$, $\cos p$, $\cos q$, on tire

$$e^{pi} \,.\, e^{qi} \equiv e^{(p+q)i}. \tag{17}$$

D'un autre côté, si l'on soumet les séries à une manipulation analogue à celle de la multiplication des polynômes, on peut constater; de même, que

$$e^{p} \,.\, e^{qi} \equiv e^{p+qi}. \tag{18}$$

112. L'on a aussi

$$e^{2\pi i} \equiv e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + \sin 2k\pi i = 1.$$

On peut donc établir que

$$e^{(p+qi)+2k\pi i} = e^{p+qi} e^{2k\pi i} = e^{p+qi}, \tag{19}$$

ce qui fait que l'exponentielle e^{p+qi} ne change pas de valeur quand le diplet exposant est augmenté d'un multiple quelconque de $2\pi i$.

113. De tout ce qui précéde, il découle, finalement, que l'on a

$$e^{(a+bi)} \,.\, e^{(c+di)} \equiv e^{a} \,.\, e^{bi} \,.\, e^{c} \,.\, e^{di} \equiv e^{(a+c)+(b+d)i}. \tag{20}$$

Donc, en résumé, les règles formelles du calcul sont, relativement à ces types d'exposants, conservées; et le sens de l'expression e^{a+bi}, parfaitement déterminé.

114. Nous avons ainsi exprimé le diplet $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ au moyen de l'exponentielle e^{α}; s'il s'agissait de tout autre diplet (u, v) on pourrait le réduire à l'antérieur en ecrivant

$$u = e^{x}\cos y; \qquad v = e^{x}\sin y,$$

x et y étant deux inconnues; pour les déterminer, il n'y a qu'à quarrer et sommer ces deux expressions, et aussi diviser l'une par l'autre, on obtient, ainsi,

$$x = \log_e \sqrt{u^2 + v^2}, \qquad \frac{v}{u} = \operatorname{tang} y.$$

115. Si, donc, y est le moindre des angles qui ont pour tangente la valeur $v : u$, il résulte,

$$(u, v) \equiv u + vi \equiv e^{x}(\cos y + \sin y\, i) \equiv e^{x}e^{yi} \equiv e^{x+yi+2k\pi i}$$

$$\equiv e^{\log\sqrt{u^2+v^2} + \left(\text{ang tang}\frac{v}{u} + 2k\pi\right)i}. \tag{21}$$

Résultat qui peut servir, aussi, pour définir ce que l'on doit comprendre par « élever un diplet (u, v) à une puissance égale à un autre diplet », car si l'on remplace le premier membre de (21) par le second, la phrase antérieure a un sens bien défini (¹).

116. Il est, du reste, facile de vérifier directement que l'on a, d'après les conventions qui ont été faites, élevant au carré le diplet $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ et faisant $m = \text{tang } \alpha$,

$$e^{2i\alpha} \equiv \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha i \equiv \frac{1+mi}{1-mi} \equiv \frac{1-m^2}{1+m^2} + \frac{2m}{1+m^2}i. \tag{22}$$

Nous pouvons, à présent, envisager d'une manière entièrement générale la question que nous avons indiquée au numero 109.

117. Dans le formalisme relatif à l'analyse bidimentionnelle, une droite est l'ensemble infini de systèmes *de trois diplets* (x, y, z), non tous à la fois nuls (points de la droite), qui remplissent la condition

$$ax + by + cz = 0, \tag{23}$$

a, b, c, étant trois diplets connus; x, y, z, de même que a, b, c, ne rentrent, évidemment, que par leurs rapports $a : b : c$; $x : y : z$.

Un point de l'espace bidimentionnel peut être déterminé évidemment aussi, par la condition de satisfaire simultanément aux deux conditions

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0; \qquad a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$

c'est-à dire, d'appartenir à deux droites à la fois et, réciproquement, deux points donnés $P_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$; $P_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ déterminent une droite r d'équation $ax + by + cz = 0$ qui doit être satisfaite par les « coordonnées » x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 de ces points. En remplaçant ces valeurs dans l'équation (23) on obtient deux équations linéaires qui permettent de trouver les rapports $a : b : c$. La droite r qui contient ces deux points, est donc déterminée.

(¹) Les opérations inverses : radication, logarithmation, quand il s'agit de diplets, soit que ceux-ci figurent comme bases ou comme indices, résultent, maintenant, avoir aussi un sens bien défini.

118. Si on considère, maintenant, la droite $y = 0$, nous conviendrons de désigner du nom de *coefficient angulaire* m de la droite r, par rapport à la droite $y = 0$, le diplet

$$m = \frac{(y_2 : z_2) - (y_1 : z_1)}{(x_2 : z_2) - (x_1 : z_1)} = -\frac{a}{b}. \tag{24}$$

119. Nous conviendrons aussi de désigner du nom de « distance » entre les deux points P_1, P_2, considérés, le diplet

$$d = \sqrt{\left(\frac{y_2}{z_2} - \frac{y_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{z_2} - \frac{x_1}{z_1}\right)^2} \tag{25}$$

Pour deux points de la droite $y = mx$ on a

$$d = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}. \tag{26}$$

120. Nous allons définir, à présent, un troisième diplet que nous désignerons du nom d'*angle* de la droite r et de la droite $y = 0$. Remplaçons, dans la formule (22), m par le diplet (p, q) obtenu par la formule (24), nous avons alors

$$e^{2iz} = \frac{1 - q + pi}{1 + q - pi} = \frac{1 - p^2 - q^2}{(1 + q)^2 + p^2} + \frac{2p}{(1 + q)^2 + p^2} i = u + vi = (u, v),$$

et nous avons, d'après (21), puisque ici

$$u = \frac{1 - p^2 - q^2}{(1 + q)^2 + p^2}, \qquad v = \frac{2p}{(1 + q)^2 + p^2},$$

$$e^{2iz} \equiv e^{-\frac{1}{2}\log_e \frac{(1+q)^2+p^2}{(1-q)^2+p^2} + \text{ang tang}\left(\frac{2p}{1-p^2-q^2}\right) i + 2k\pi i}$$

que l'on peut exprimir ainsi en égalant les exposants de e

$$z = \frac{1}{2}\,\text{ang tang}\,\frac{2p}{1 - p^2 - q^2} + \frac{1}{4}\log_e \frac{(1 + q)^2 + p^2}{(1 - q)^2 + p^2}\, i + k\pi. \tag{27}$$

Ce diplet (27), joint aux formules (7) et (8), définira l'angle (réel ou « imaginaire ») déterminé par la droite r avec la droite $y = 0$. Si m est réel, c'est-à-dire si $q = 0$, on aura

$$\alpha = \frac{1}{2}\,\text{ang tang}\,\frac{2p}{1 - p^2} + k\pi = \frac{1}{2}\,2\,\text{ang tang}\,p + k\pi = \text{ang tang}\,p + k\pi$$

et l'une ou l'autre des formules (7) ou (8) fournira z en fonction de p.

Quand q n'est pas nul, la valeur $s = \frac{2p}{1 - p^2 - q^2}$, qui est réelle, peut résulter supérieure ou inférieure à l'unité, alors les formules (8) ou (7) fourniront la valeur β, de ang tang $\frac{2p}{1 - p^2 - q^2}$ en fonction de tang s; l'autre sommant est le logarithme d'une quantité réelle et fournit, aussi, une valeur réelle, γ; on aura donc toujours un diplet bien déterminé :

$$\alpha = \left(\frac{1}{2}\beta + k\pi\right) + \frac{1}{4}\gamma i.$$

121. On peut aisément constater que les formules fondamentales de la trigonométrie et de la géométrie analytique, entre autres la (5) et les (14) de numero 96, sont ou peuvent être conservées quand m et α sont des diplets définis comme plus haut. On peut, de même, généraliser, par exemple, la formule

$$p = \frac{y' - mx' - n}{\sqrt{1 + m^2}}$$

qui fournit la distance d'un point (x', y') à la droite $y = mx + n$.

122. Arrêtons-nous un instant et jetons un coup d'œil sur le chemin parcouru. Nous sommes arrivé à concevoir des « diplets » qui comprennent, comme cas particuliers, les nombres « réels » qui, eux, ont une manipulation formelle, capable — sauf quelques difficultés relatives aux éléments à l'infini — de recevoir une interprétation graphique. Le domaine analytique à deux dimentions est alors représenté par un plan; les équations linéaires, par des droites de ce plan; le droites $y = 0$ et $x = 0$, par les axes de coordonnées cartésiennes, le point analytique $x : y : z$, par le point graphique du plan de coordonnées $X = \frac{x}{z}$, $Y = \frac{y}{z}$. L'équation $ax + by + c = 0$ prend la forme $aX + bY + cZ = 0$; le coefficient angulaire $m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = -\frac{b}{a}$, est la tangente de l'angle que forme la droite en question avec l'axe des X. L'équation (25) représentera la distance, telle que nous en avons la notion courante,

$$d = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 \quad (Y_2 - Y_1)^2},$$

de deux points dont les coordonnées sont (X_1, Y_1); (X_2, Y_2). Tout cela est donc bien d'accord avec les concepts et les notions familières que

nous avons rappelées au commencement (n°s 80 et 81). Mais aussitôt que l'on introduit les diplets dans leur acception générale, c'est-à-dire, avec leurs deux unités capitales, le fait de conserver les mêmes noms bouleverse nos idées courantes sur ces notions. Ainsi, considerons les deux droites

$$y = \pm xi.$$

123. Nous avons, à présent, comme expression de $Y_2 - Y_1$, la valeur $\pm (X_2 - X_1)\, i$, dont le carré est $-(X_2 - X_1)^2$; donc, remplaçant dans (26), nous obtenous comme expression de la distance entre deux points quelconques de ces droites une valeur toujours nulle. Voilà un résultat bien propre à nous troubler. Mais ce n'est pas tout. L'angle que l'une ou l'autre de ces deux droites forme avec $y = 0$, est, d'après la definition du numero 120, donnée par le diplet

$$\alpha = \left(0, \frac{1}{4} \log \infty\right) = \infty\, i,$$

que nous nommerons « infini imaginaire ». On obtiendrait de même, $\cos \alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + i^2}} = \infty$; $\operatorname{sen} \alpha = \pm \infty\, i$. Les coefficients angulaires de ces droites étant $\pm i$, on a, d'après la formule (5) pour la tangente de leur angle

$$m = \frac{i + i}{1 + 1} = i,$$

de sorte que ces droites forment aussi, entre elles, un angle « infini imaginaire ». Et nous ne sommes pas encore au bout de paradoxes. Si m est le coefficient angulaire d'une autre droite r quelconque, la tangente de l'angle de cette dernière avec les droites $y = \pm xi$ en question est, d'après toujours la formule (5)

$$\frac{m - i}{1 + mi} = -\frac{m - i}{i - m}\, i = -i,$$

de sorte que cet angle est constant quelle que soit la droite r, et sa valeur est encore « infinie imaginaire ». Une quelconque de ces droites, par exemple, $y = xi$, forme avec elle même, un angle quelconque, car son coefficient angulaire est d'après (5)

$$m = \frac{i - i}{1 + i^2} = \frac{0}{0}.$$

Et si l'on applique les formules (14) (numero 96) à un point quelconque (x_1, y_1) et au point « à l'infini » de ces droites $y = \pm xi$ (droites

«isotropes»), c'est-à-dire, à l'un ou l'autre des points « cycliques » du plan de base, points dont les coordonnées sont $x = \infty$, $y = \pm \infty\, i$ l'on obtient, puisque l'on a ici

$$m = \pm i, \quad \cos \alpha = \infty, \quad \therefore \quad d = \frac{\infty - x_1}{\cos \alpha} = \frac{\infty}{\infty},$$

d résulte donc indéterminé (1).

La formule du numero 121

$$p = \frac{y' - mx' - n}{\sqrt{1 + m^2}}$$

appliquée à la distance d'un point quelconque à une isotrope, donne comme valeur de cette distance

$$p = \frac{y' \mp x'i}{\sqrt{1 + (\pm i)^2}} = \infty.$$

124. Des résultats aussi paradoxaux et renversants, quand l'on tient compte, pour les apprécier, de notre intuition sur les angles et les distances, sont, sans doute, dangereux pour les ouvrages de vulgarisation et d'enseignement; il serait sage de désigner les notions ainsi généralisées par d'autres noms, malgrè que les notions vulgaires homonymes ne soient que des cas particuliers de celles-là. Et on peut dire que, pour ces droites isotropes en particulier, les notions d'angle et de distance disparaissent; cette dernière, en tout cas, cesse de caractériser deux points des droites en question, par rapport à d'autres points des mêmes droites.

(1) Ce résultat ne pourrait se produire, dans le plan de base, que pour deux points infiniment éloignés (si l'on peut s'exprimer ainsi; voir ce qui a été dit aux numeros 98 et 102). Soient, effectivement, (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées de deux points du plan de base. Employant, comme il le faut ici, les coordonnés homogènes, on peut écrire : $x_1 = x_1' : t_1$, $y_1 = y_1' : t_2$, $x_2 = x_2' : t_2$, $y_2 = y_2' : t_2$, donc,

$$d^2 = \frac{(x_1' t_2 - x_2' t_1)^2 + (y_1' t_2 - y_2' t_1)^2}{(t_1 t_2)^2}$$

pour que cette distance devienne indéterminée $\left(\text{ou prenne la forme } \frac{0}{0}\right)$ il faut, d'abord, que l'on ait t_1 ou t_2 nul; si t_1 est nul, le numérateur ne peut s'annuler que si l'on a $(x_1'^2 + y_1'^2)\, t_2 = 0$. On a donc bien, ou t_2 nul ou $x_1^2 + y_1^2 = 0$. Au même résultat conduit l'hypothèse $t_2 = 0$.

Il y a, peut-être, quelque difficulté à concevoir comment deux point infiniment éloignés peuvent être à une distance indéterminée, mais on peut lever cette difficulté en considérant deux points appartenant à deux droites parallèles et à une sécante perpendiculaire commune à ces deux parallèles, et en imaginant ensuite que cette sécante s'éloigne á l'infini.

II

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

a) Rappel des chapitres I et II

125. *Les abscisses sont réelles.* — Cherchons, autant qu'il sera possible, une interprétation graphique à l'emploi des diplets aux questions d'analyse formelle que nous venons de considérer. Rappelons la représentation graphique indiquée aux chapitres précédents. Considerons, dans l'espace, trois axes deux à deux orthogonaux OXYZ (fig. 30). Le plan de la figure, ou plan de base π, est celui des XY. Supposons, pour commencer, que x ne prend que des valeurs réelles, X. Si la valeur correspondante Y, de y, est aussi réelle, le point représentatif de (x, y) est, comme d'habitude, celui, M, du plan de base de coordonnées (X, Y); si y est le diplet $Y + Zi$, le point représentatif est celui, P, de l'espace, dont les coordonnées sont $OA = X$; $AM = Y$; $MP = Z$. Donc, la droite OP qui joint P à l'origine O des coordonnées représentera la droite analytique $y = mx$, m étant le diplet $p + qi$. On voit, en effet, que cette droite analytique passe bien par l'origine O des coordonnées, et puis qu'elle contient le point P dont les coordonnées sont $x = X$ et $y = pX + qXi$; pX étant designé par $Y = \overline{AM}$ et qX par $Z = \overline{MP}$. Si $x = 1$ on aura $Y = p$, $Z = q$.

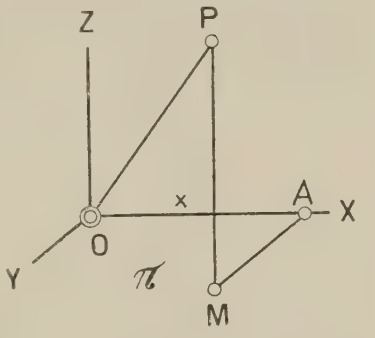


Figure 30

126. A chaque valeur de m, correspond, ainsi, une droite de l'étoile de centre O; et vice-versa. Cette étoile est, donc, la représentation graphique de la droite analytique $y = mx$, pour toutes valeurs réelles ou « imaginaires » (c'est-à-dire pour tout diplet) de m, tant que x ne prend que des valeurs réelles. À chaque diplet m, c'est-à-dire, à chaque droite de l'étoile, correspond, d'après la formule (27) un angle minimum qui, étant un diplet, est loin de répondre au concept courant ou intuitif que nous avons de la notion de l'angle POX de l'espace (fig. 30). Pas même le premier chiffre, le « réel » du diplet, correspond à l'angle « réel » AOM, lequel a pour coefficient angulaire p,

tandis que la formule (27) établit, pour la partie réelle de ce diplet-angle, la valeur

$$\frac{1}{2}\,\text{ang tang}\,\frac{2p}{1-p^2-q^2}$$

et pour qu'il correspondit à l'angle AOM, soit à « ang tang p » il faudrait que l'on eut pour cette valeur, la suivante :

$$\frac{1}{2}\,\text{ang tang}\,\frac{2p}{1-p^2}.$$

127. Que peut-on comprendre, graphiquement, par « rotation générale de l'étoile autour du centre O d'un angle $\alpha = r + si$ »? Si m est le coefficient angulaire correspondant à α (1), cette rotation consistera à modifier la position d'une droite de l'étoile de telle façon que son coefficient angulaire actuel (avant la rotation), m_1, se transforme en m_2, tel que l'on ait :

$$m_2 = \frac{m_1 + m}{1 - m_1 m}.$$

Chaque droite modifiera donc sa position, sauf celles pour qui on aura $m_2 = m_1 = \dfrac{m_1 + m}{1 - m_1 m}$, ce qui donne $m_1 = \pm i$. Or, nous avons vu que ces deux droites sont, justement, les isotropes qui ont de si déconcertantes propriétés (n° 123). Nous avons vu dans les premier chapitre, que ces deux droites, et cela résulte nouvellement de ce qui vient d'être rappelé (n° 125) que, dans notre représentation, se sont les droites i du plan XOZ, bissectrices des angles XOZ (fig. 31).

128. Supposons, pour commencer, que l'angle de la rotation soit « réel » $(\gamma, 0)$ et que l'on ait le faisceau analytique $y = mx$; x étant toujours réel, et m un diplet. À chaque droite du faisceau, correspond une valeur de m; et vice-versa. La représentation graphique est constitué par l'étoile de centre O. Si l'on réalise la rotation, tous les rayons du plan de base auxquels correspond un m réel, tournent tel quel notre intuition comprend l'acte de tourner; et, évidemment, aucun de ces rayons ne reste immobile; il ne peut donc pas exister, dans ce plan, de rayon qui soit autocorrespondant (ou « uni » ou « double »)

(1) Si l'on donne $\alpha = \gamma + \delta i$, la formule (27) permet de trouver le coefficient angulaire correspondant. Après quelques transformations, on obtient

$$m = \frac{\pm(1 + e^{4\delta}) - 2e^{2\delta}\cos 2\gamma}{1 + e^{8\delta} - 2e^{4\delta}\cos 4\gamma}\,(2e^{2\delta}\sin 2\gamma \pm (e^{4\delta} - 1)\,i).$$

dans la correspondance homographique déterminée dans le plan de base, par les positions initiales et par les finales des droites. Mais si nous considérons le faisceau analytique général ou « formel », représenté par notre étoile de rayons, il n'en arrive pas de même, car relativement aux rayons situés hors du plan de base pour qui les m sont de vrais diplets (γ, δ), nous avons vu plus haut (n° 127) qu'il existe deux droites, les isotropes i (dont les diplets coefficients angulaires m sont $(0, \pm 1)$) qui restent inmobiles dans la rotation. Ces droites constituent, donc, des éléments autocorrespondants dans l'homographie générale formelle déterminée par les positions initiales des droites de

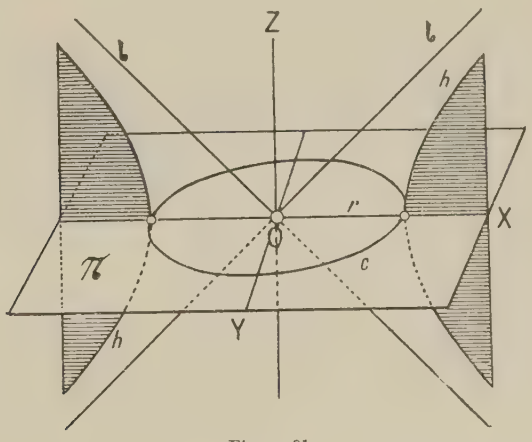


Figure 31

l'étoile, et par les positions finales de ces mêmes droites après la rotation. Nous avons ainsi, en quelque sorte, objectivé une propriété qui, énoncée en ne pensant qu'au plan de base, semblera le plus absurde et extravagant des paradoxes.

129. Si l'angle de la rotation est un vrai diplet (α, β), les droites du plan de base sortiront de ce plan aussitôt le mouvement initié; la rotation « imaginaire » ne pourrait maintenir pour les droites de ce plan, le caracter intuitif de la notion de rotation; mais les droites autocorrespondantes de l'étoile seront toujours les isotropes.

130. Nous étudierons, plus loin, une représentation appropriée au cas où, dans $y = mx$, x et m sont des diplets; pour l'instant, et afin de terminer avec la représentation graphique relative au cas que nous venons de considérer, nous allons chercher qu'elle est la ligne qui, dans notre représentation graphique, correspond à la rotation d'un point.

131. Un point de coordonnées (x, y) est à une distance de l'origine O égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$ (n° 119). Le faire tourner autour de l'origine, signifie faire tourner de l'angle α assignée à la rotation, la droite qui le lie à O, en conservant invariable cette distance.

132. Quel est, dans notre représentation, le lieu des points équidistants de O? Dans le plan de base nous avons, d'abord, une circonférence de rayon $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Seulement il faut, pour cela, que r soit réel, car autrement la rotation du point de base considéré le ferait sortir de ce plan. Posons donc

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \left(0, \pm\sqrt{x^2 - r^2}\right).$$

Si la valeur arithmétique de x est moindre que celle de r, le lieu est, donc, la circonférence c du plan de base de centre O et rayon r. Au cas contraire si $|x| > r$, le diplet $\left(0, \pm\sqrt{x^2 - r^2}\right)$ exprime que le lieu est l'hyperbole equilatère h du plan ZOX, d'axe réel, de longueur $2r$, dans le plan de base comme il à été longuement établi au chapitre premier (voir n°s 3 à 6, fig. 3, que nous reproduisons ici, fig. 31), les asymptotes de cette hyperbole étant les droites isotropes. Puisque nous avons vu que tous les points de ces dernières sont à distance nulle de l'origine O, ils ne pourront être atteints par le lieu cherchés dont les points sont à la distance r (non nulle) de O. Si r était nul, nous avons vu que le lieu $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$ se réduit aux asymptotes mêmes).

133. Le lieu représentatif du mouvement de rotation du point à la distance r, réelle, de l'origine est, donc, la circonférence c et l'hyperbole h (fig. 31). Tout autre point de l'espace est, en effet, à une distance de O de valeur différente de r (réelle si le point appartient au plan de base, ou au plan ZOX; « imaginaire » s'il se trouve hors de ces plans).

134. Considerons, maintenant, le cas où r est un diplet, x se conservant toujours réel. Posons $r = a + bi$. Nous avons alors successivement :

$$r^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$y^2 = r^2 - x^2 = (a^2 - b^2 - x^2) + 2abi$$

$$y^2 = (Y + Zi)^2 = Y^2 - Z^2 + 2YZ$$

$\therefore$

$$Y^2 - Z^2 = a^2 - b^2 - x^2$$

$$ab = YZ.$$

Comme x est supposé toujours réel, on peut poser $x = X$; donc,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - Z^2 &= a^2 - b^2 \qquad (a) \\ ab &= YZ \qquad (b) \end{aligned} \tag{28}$$

Le lieu est constitué par l'intersection de l'hyperboloide de révolution a) dont l'axe est celui de Z, avec le cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des X et qui a pour directrice l'hyperbole equilatère b) rapportée aux axes OY et OZ, qui en sont les asymptotes (fig. 32). Si l'on fait $b = 0$ (dans $r = a + bi$), la courbe b) de (24) se dédouble et se transforme en deux droites $Y = 0$ et $Z = 0$, de sorte que le cylindre se transforme en deux plans : celui de base π, et celui des XZ qui coupent l'hyperboloïde $X^2 + Y^2 - Z^2 = a^2$ précisément suivant la circonférence $X^2 + Y^2 = a^2$ et l'hyperbole $X^2 - Z^2 = a^2$; et l'on retombe, comme il le fallait, sur la représentation de la figure 31.

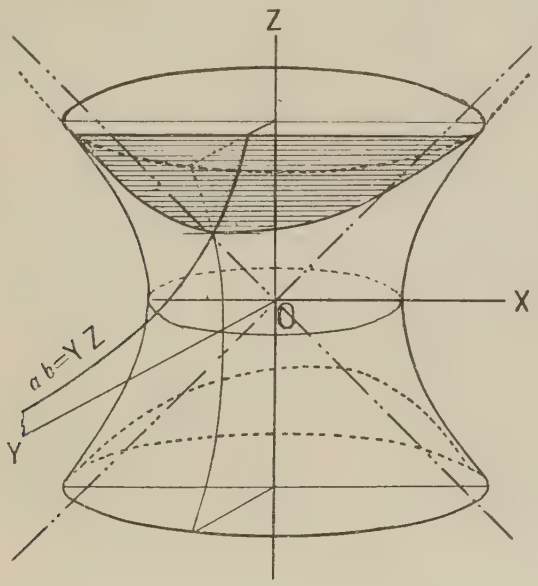


Figure 32

135. Observons aussi qu'il n'est pas possible de donner à la rotation tel angle imaginaire que l'on voudra; en effet, le point considéré doit, forcément (dans notre représentation graphique) se déplacer le long d'une ligne déterminée, et il est alors évident que, à chacune des droites que unissent l'origine O avec les points de cette ligne, corres-

pondent des coefficients angulaires et des angles de rotations déterminés. Si le rayon r est réel (diplet a, 0), le coefficient angulaire ne peut augmenter que de quantités réelles (c, 0) dans le plan de base

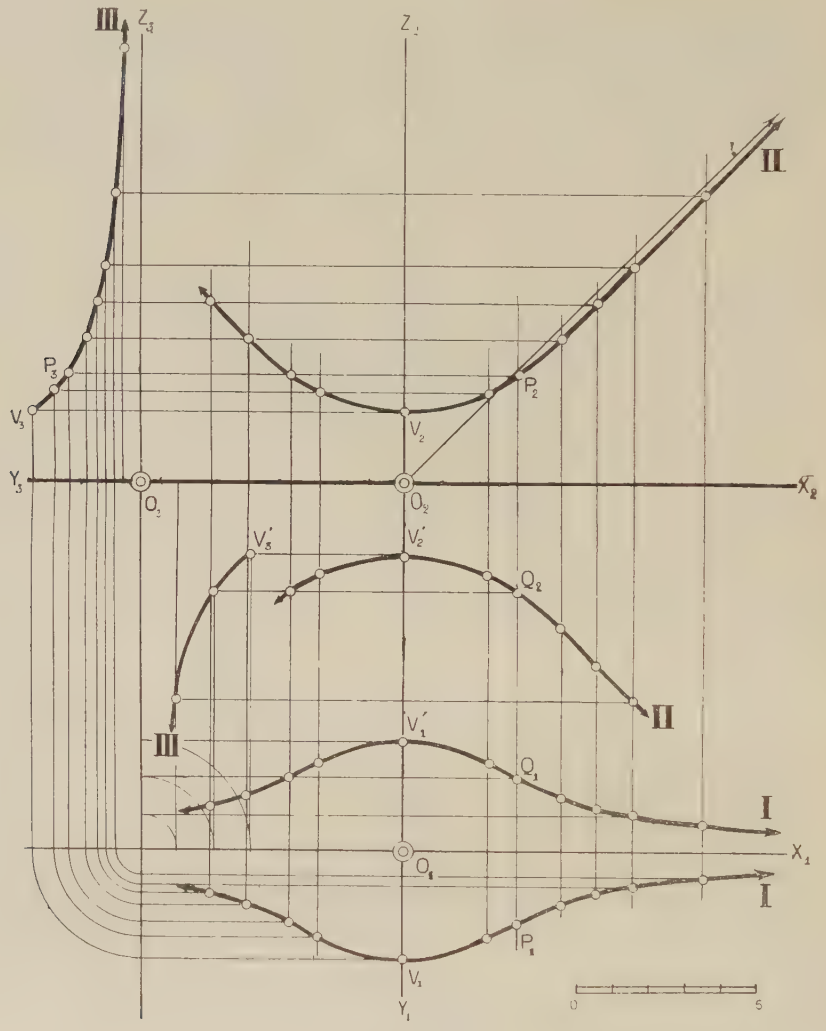


Figure 33

[ou l'on a $m = (p, 0)$], et de quantités imaginaires « pures » $(0, d)$ dans le plan ZOX [ou l'on a $m = (o, q)$].

La figure 33 donne les trois projections du lieu pour le cas particulier de $r = 3 + 2i$. On peut observer que la projection orthographi-

que (II) est tangente aux droites à 45°, ε, qui correspondent aux isotropes. La projection de profil (III) est une partie de l'hyperbole equilatère, trace du cylindre $YZ = ab = 6$. Pour $Z = \pm 2$ on a $X = 0$, et ces points V, V′, limitent les arcs de l'hyperbole en question, qui passent par le point à l'infini de l'axe des Z projeté.

Voici les coordonnées de quelques uns des points de la courbe :

$x = 0 \quad ; \ y = 3 \quad ; \ z = 2 \qquad x = 4{,}33; \ y = 1{,}5; \ z = 4$

$x = 2{,}3 \ ; \ y = 2{,}4; \ z = 2{,}5 \qquad x = 5{,}34; \ y = 1{,}2; \ z = 5$

$x = 3{,}16; \ y = 2 \quad ; \ z = 3 \qquad x = 6{,}32; \ y = 1 \quad ; \ z = 6$

$x = 8{.}28; \ y = 0{,}75; \ z = 8$

$x = 12{,}2 \ ; \ y = 0{,}5 \ ; \ z = 12.$

136. Passons au cas où les valeurs des x sont aussi des diplets. Nous sommes obligés, à présent, de coter notre espace comme il a été indiqué au chapitre deuxième. Rappelons brièvement en quoi consiste cette représentation graphique. Après avoir fixé, comme devant, les

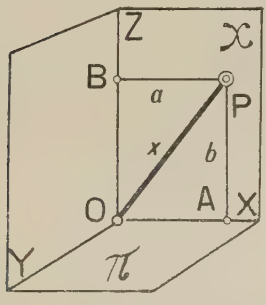


Figure 34

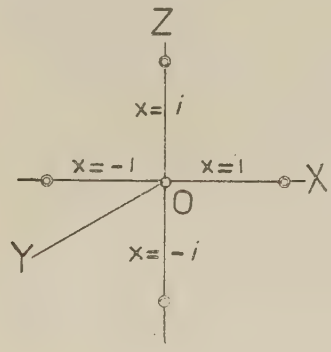


Figure 35

trois axes de coordonnées OX, OY, OZ orthogonaux, deux à deux, le plan ZOX (fig. 34) sera affecté aux vecteurs x; ainsi, chaque diplet $x = X + Zi$, sera représenté par un point de ce plan de coordonnées X et Z correspondantes au diplet; et réciproquement, à chaque point P de ce plan χ correspondra une valeur a de X et une b de Z, soit une abscisse $x = a + bi$ (fig. 34); le vecteur $\overline{OP}$ représentera, donc, l'abscisse, ou le diplet, x. Les figures 13, 14 et 15 des numéros 36 à 39 du chapitre deuxième que nous reproduisons (figs. 34, 35, 36)

sont suffisamment explicatives: la 35 indique les quatre valeurs unitaires correspondantes aux diplets (1, 0), vers les X positives; (0, 1), vers les Z positives; (— 1, 0), vers les X négatives; (0 — 1), vers les Z négatives.

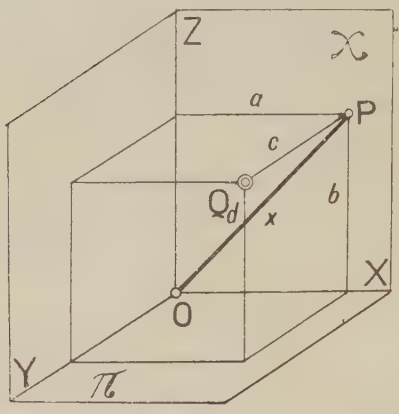


Figure 36

Pour représenter la valeur correspondante de $y = Y + Vi$, on tracera par le point P représentatif de x, la parallèle à l'axe des Y, du côté qui correspond au signe de Y, et l'on indiquera un segment $\overline{PQ} = Y = c$ (fig. 36); ce point Q sera affecté de la cote $V = d$ (positive ou négative). Ainsi donc, ce point Q qualifié de la cote V, qui remplace la quatrième dimention manquante, sera censé représenter le point qui a pour coordonnées les diplets

$$x = X + Zi = a + bi, \qquad y = Y + Vi = c + di.$$

137. *Les abscisses sont des « diplets »*. — Étudions, pour commencer, les fonctions

$$y = mx \quad \text{et} \quad y^2 + x^2 = r^2,$$

m et r pouvant ou non être des diplets, mais x l'étant. Nous avons étudié au chapitre deuxième le cas où m est réel. Si m est réel et a la valeur a, nous aurons

$$y = Y + Vi = aX + aZi$$

$\therefore$

$$Y = aX, \qquad V = aZ.$$

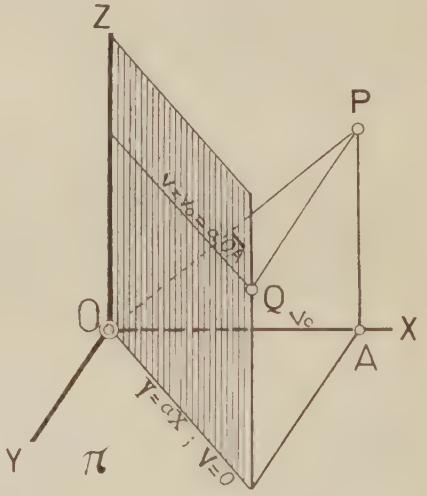


Figure 37

Nous obtenons donc, comme représentation de la droite $y = ax$, pour chaque valeur de a, un plan coté (fig. 37; voyez aussi la fig. 16), perpendiculaire à π par la droite $Y = aX$ de ce dernier. Un point Q de ce plan, ayant l'abscisse $X + Zi$, a, comme ordonnée

$y = aX + aVi$; de sorte que $\overline{PQ} = a\overline{OA}$, et la cote de Q, a la valeur $a\overline{PA} = aZ$. Les points de même cote appartiennent à des parallèles à π, et ceux de cote nulle sont ceux de la droite $Y = aX$ du plan de base.

138. Mais si l'on a $m = a + bi$, il en résulte :

$$y = Y + Vi = (a + bi)(X + Zi) = aX - bZ + (aZ + bX)\,i$$

$\therefore$

$$\begin{aligned} Y &= aX - bZ \qquad (a) \\ V &= aZ + bX \qquad (b) \end{aligned} \tag{29}$$

À chaque droite du faisceau ne correspond donc plus une droite de l'étoile de centre O comme dans le cas traité plus haut (n° 126) quand x était réel, mais bien un plan coté d'équation (29 a), coté d'après

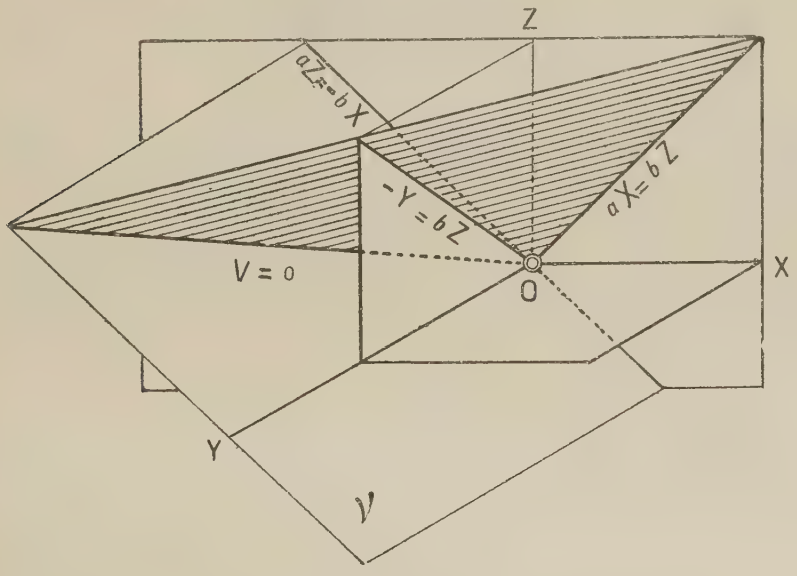


Figure 38

(29 b) (fig. 38); cependant, à un point correspond toujours un point. Les points de même cote V_1, appartiennent aux droites du plan (29 a) qui remplissent la condition $aZ + bX = V_1$ qui représente un plan ν perpendiculaire à celui des XZ par la droite $Z = -\frac{b}{a}X + \frac{V_1}{a}$. Ainsi, les points de même cote appartiennent à l'intersection du plan (29 a) avec ν. La cote nulle correspond à la droite, intersection de (29 a) avec le plan

$Z = -\frac{b}{a} X$, qui passe par l'origine O. La figure 38 se rapporte à la valeur $m = -(1 + i)$.

139. En particulier, les « droites isotropes », pour lesquelles on a $m = (0, \pm 1) \equiv \pm i$, se trouvent représentées par les plans ι bissecteurs des dièdres qui ont pour faces le plan de base π et le plan des ZX (fig. 39), cotés de telle sorte que, en géométrie euclidienne, toute parallèle au plan des ZY à la distance X, a une cote de cette même

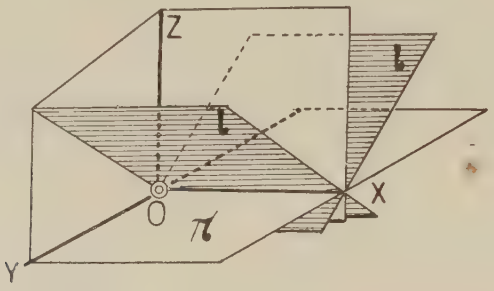


Figure 39

valeur X. Cela résulte de faire, dans les équations (29), $a = 0, b = \pm 1$; car on a alors, en effet,

$$Y = \mp Z, \qquad V = \pm X.$$

Les points des plans ι de cote nulle, se trouvent, donc, à l'intersection des ι avec le plan des YZ; ils constituent les bissectrices des angles YOZ.

140. L'équation

$$y = (a + bi)(X + Zi) + (n + si)$$

est représentée par un plan coté coupant les axes OX, OY, OZ, respectivement aux distances « réelles », $-\frac{n}{a}$, n, $\frac{n}{b}$; et la cote V d'un point de coordonnées X, Y, Z est $V = aZ + bX + s$. Ce plan coupe ceux de projection suivant les droites $Y = aX + n$; $aX - bZ + n = 0$; $Y = bZ + n$ (fig. 40). Ce plan est, évidemment, parallèle à celui qui représente l'équation $y = (a + bi)(X + Zi)$, et la cote de chaque point vient aussi diminuée de la quantité constante s (voyez aussi fig. 17, n° 41). On peut donc définir formellement le parallélisme euclidien en disant que, en général, toutes les quantités étant des diplets, les droites

$$y = mx \qquad \text{et} \qquad y = mx + n$$

seront dites « parallèles ». Voyez aussi plus haut numero 102.

141. On peut calculer graphiquement le diplet d qui correspond à la définition formelle de « distance » de deux points P_1 et P_2 de coordonnées :

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + b_1 i \\ y_1 = c_1 + d_1 i \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = a_2 + b_2 i \\ y_2 = c_2 + d_2 i \end{cases}$$

soit

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = m + ni$$

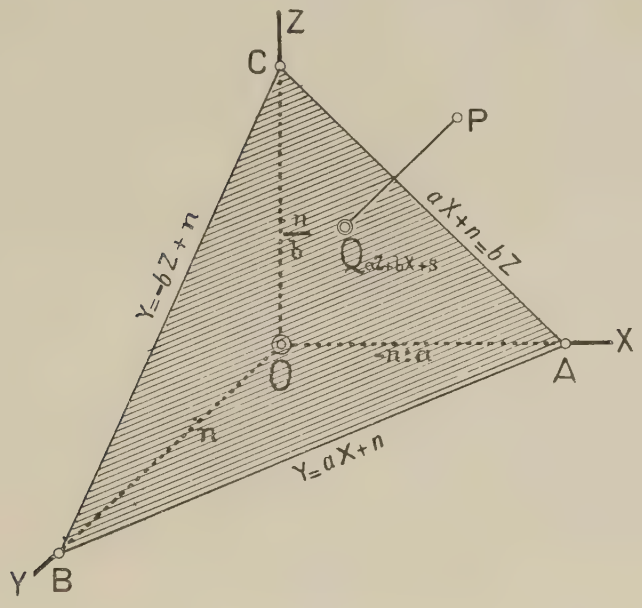


Figure 40

m et n étant les nombres qui découlent des calculs suivants :

$$(y_2 - y_1)^2 = (c_2 - c_1)^2 - (d_2 - d_1)^2 + 2(c_2 - c_1)(d_2 - d_1)i = r + si$$

$$(x_2 - x_1)^2 = (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2 + 2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)i = p + qi$$

$$d = \sqrt{(r + p) + (s + q)i} = m + ni$$

$$(r + p) + (s + q)i = (m^2 - n^2) + 2mni$$

$$\begin{cases} r + p = m^2 - n^2 \\ s + q = 2mn \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}m = \pm\sqrt{\sqrt{(r + p) + \sqrt{(r + p)^2 + (s + q)^2}}} \\ \sqrt{2}n = \pm\sqrt{-(r + p) + \sqrt{(r + p)^2 + (s + q)^2}} \end{cases}$$

Or, r est $(c_2 - c_1)^2 - (d_2 - d_1)^2$; p est $(a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2$; s est $2(c_2 - c_1)(d_2 - d_1)$; q est $2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$.

Graphiquement, si Q_1 et Q_2 sont le points du plan des ZY qui correspondent à x_1 et x_2, nous savons que $(x_2 - x_1)$ est les vecteur $\overrightarrow{Q_2Q_1}$ et, d'après les règles très simples du calcul graphique, on peut aisément construire le vecteur qui est le carré de ce vecteur $\overrightarrow{Q_2Q_1}$, et qui nous donne les valeurs p et q. On peut, de même (un peu moins rapidement car il faut construire d'abord dans un plan quelconque, le vecteur $y_2 - y_1$ en tenant compte des cotes d_1 et d_2), construire le vecteur carré de $(y_2 - y_1)$; on obtient ainsi graphiquement r et s, Maintenant il faudra construire le vecteur $(r + p) + (s + q)\,i$ dont la racine carrée graphique fournit les valeurs m et n et, ainsi, le diplet $m + ni$ de *distance* entre les points donnés. Cette construction appliquée à des points P_1 et P_2 de coordonnées réelles, c'est-à-dire, appartenant au plan de base, conduit bien au segment P_1P_2 lui même. Du reste, en général, s'il s'agit de traduire en opérations graphiques des opérations ou des calculs analytiques faites sur des points dont les coordonnées sont des diplets, si ces points sont représentés d'après notre système (n° 136) on pourra profiter des segments tels que les $a_2 - a_1$, $b_2 - b_1$, $c_2 - c_1$, qui se trouvent déjà établis sur la figure; quand aux différences de cotes telles que $d_2 - d_1$, il faudra introduire spécialement les segments nécessaires puisqu'ils ne sont pas d'avance graphiquement établis.

b) Circonférence vectorielle

142. Occupons-nous maintenant de l'équation $x^2 + y^2 = r^2$. On peut considérer divers cas :

Premier cas : r est à une unité capitale; x à deux unités capitales. — Nous avons alors,

$$y^2 = (Y + Vi)^2 = Y^2 - V^2 + 2YVi =$$
$$= r^2 - x^2 = r^2 - (X + Zi)^2 = r^2 - X^2 + Z^2 - 2XZi.$$

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} Y^2 - V^2 &= r^2 - X^2 + Z^2 \qquad (a) \\ YV &= -XZ \qquad (b) \end{aligned} \tag{30}$$

La projection, s'il est permis de s'exprimer ainsi, de ce lieu sur l'espace tridimentionnel, s'obtient, donc, en éliminant V entre a)

et *b*). Il résulte comme équation de cette projection, la surface suivante :

$$X^2 + Y^2 - Z^2 - \frac{X^2Z^2}{Y^2} = r^2. \tag{31}$$

A chaque point (X, Y, Z) de cette surface correspond une cote $V = -\frac{XZ}{Y}$ qui doit être réelle, de sorte qu'il faudra enlever du lieu (31) les endroits où cela ne se réalise pas afin qu'il corresponde au lieu (30). Dans (31), X, Y, Z figurent au carré de sorte que la surface correspondante est symétrique par rapport aux plans, aux axes et au centre des coordonnées.

143. *Coupes de la surface.* — Examinons la coupe du lieu coté (30), par le plan de base $Z = 0$. Si, en (30*b*), on pose $Z = 0$, il faut, du moins si X n'est pas infini, que l'on ait $Y = 0$, ou $V = 0$. Pour Y nul, l'équation (31) est satisfaite par toute valeur de X, ce qui signifie que

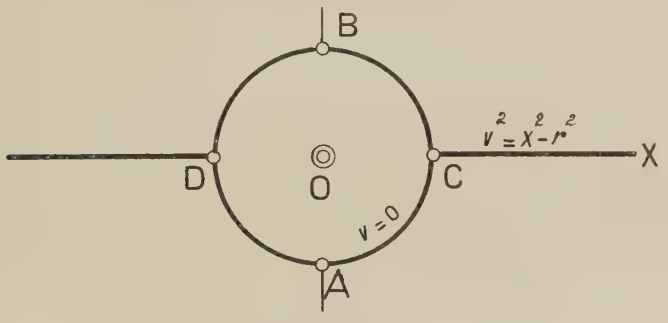


Figure 41

l'axe des X appartient tout entier à la surface (31) et même qu'il y doit être considéré comme droite double puisque Y et Z figurent, dans (31), au carré. Mais pour satisfaire à (30*a*) nous devons aussi avoir

$$X^2 - V^2 = r^2 \tag{32}$$

ce qui signifie que le segment de l'axe des X compris entre $+r$ et $-r$, à partir de O n'admettant pas de cotes réelles, ne peut appartenir au lieu (30).

Si V est nul, on a, comme lieu, la circonférence

$$X^2 + Y^2 = r^2. \tag{33}$$

Pour une valeur de X infiniment grande, (30*a*) exige une valeur de même infiniment grande de V, Y pouvant, du reste, être quelconque.

Mais (30*b*) exige que Y soit nul, donc, le point à l'infini de l'axe des X appartient à la surface et sa cote est infinie, ce qui n'ajoute rien de nouveau.

En somme, le plan de base occupe la surface cotée d'après le figure 41 constituée par la circonférence (33) de cote nulle, et de chaque côté, l'axe des X, coté hyperboliquement suivant (32).

144. La coupe par le plan des YZ donne, en faisant dans (30*b*), $X = 0$ (Z n'étant pas infini), $Y = 0$ ou $V = 0$. La première condition conduit à

$$Z^2 + V^2 = -r^2$$

impossible à satisfaire par la nature de la question. Le seconde, $V = 0$, appliquée à (30), conduit à

$$Y^2 - Z^2 = r^2 \qquad (34)$$

hyperbole equilatère de demis axes r, centre O, de cote nulle.

L'hypothèse : Z infini, conduit à Y infini et V nul, ce qui, en vertu de (34) conduit à nouveau aux points à l'infini de l'hyperbole (34).

L'axe des Z, pour qui l'on a $X = Y = 0$, appartient entièrement à la surface (31) et même il en constitue une droide double, seulement, comme on vient de le voir, les cotes des points de cet axe résultent non réelles.

Il ne nous reste donc, comme coupe de (30) par le plan des YZ que l'hyperbole (34) de cote nulle.

145. Quant à la coupe de (30) par le plan des XZ dont l'équation est $Y = 0$, un raisonnement identique nous conduirait à établir, comme unique lieu, l'axe des X moins le segment compris entre $+r$ et $-r$, coté d'après (32). Cependant la surface (31) est coupée suivant l'axe des X et des Z, tous entiers, comme droites doubles; mais le cotes des points du premier, entre $+r$ et $-r$ sont, comme nous indique (32) non réelles; il en arrive de même pour tous les points de l'axe des Z, car l'on a, pour eux, $Z^2 + V^2 = -r^2$.

146. Des plans passant par l'axe des Z coupent la surface (30) suivant des hyperboles cotées, d'axe transverse situé au plan de base et de valeur r. L'autre axe varie de longueur, et les asymptotes sont les droites d'intersection du plan de coupe par les deux bisecteurs (n° 139) qui représentent les droites isotropes.

En effet, si dans l'équation (31) on fait $Y = mX$, on obtient aisément :

$$m^2X^2(1 + m^2) - Z^2(1 + m^2) = m^2r^2.$$

Rapportée à l'axe OZ et à l'axe OX′, intersection du plan de la courbe avec celui de base (droite $Y = mX$), et en observant que l'on a $X'^2 = X^2(1 + m^2)$, cette courbe a pour équation

$$\frac{X'^2}{r^2} - \frac{Z^2}{(mr : \sqrt{1 + m^2})^2} = 1 \qquad (35)$$

hyperbole dont le demi axe transverse est r, et l'autre, $r : \sqrt{\frac{1}{m^2} + 1}$.

Si $m = 1$, on obtient comme valeur de l'axe non transverse, $r : \sqrt{2}$. Les valeurs de deux axes, et la relation $X'^2 = X^2(1 - m^2)$, indiquent bien aussi que les intersections du plan de la courbe avec les isotropes $Y = \pm Z$ sont en effet les asymptotes de l'hyperbole en question.

147. Du reste, ces plans cotés représentatifs des droites isotropes sont asymptotiques du lieu (30), les plans étant, eux-mêmes, asymptotiques de la surface (31). Cela résulte de poser, dans les systèmes (30) et (31), $V = \pm Z$. On voit sans difficulté que cette condition est satisfaite pour $V = \pm X$ et alors, si X (ou V) n'est pas nul, cela ne peut arriver que pour X (et par tant pour V) infini. Si $X = 0$ (pour le plan YOZ) on doit avoir $Y = Z =$ infini, alors V est, de même, nul. Ce résultat est bien d'accord avec ce qui a été dit au numero 144 relativement á la section de la surface cotée par ce plan des YOZ.

148. Les plans qui passent par l'axe des X, par exemple le plan $Z = mY$, fournissent, comme lieu, en posant dans (31) :

$$Y = 0; \qquad X^2 - Y^2 = \frac{r^2}{1 - m^2}.$$

La première équation représente, relativement au lieu (30), comme nous avons vu, la partie cotée de l'axe des X entre l'infini et $\pm r$. La seconde, si $m^2 > 1$, représente une ellipse qui, rapportée à l'axe des X et à la droite $Z = mY$ du plan des ZOY, droite que nous prendrons comme axe des Y′, [$Y' = Y(1 + m^2)$], donne comme équation

$$\frac{X^2}{r^2 \dfrac{1}{1 - m^2}} - \frac{Y'^2}{r^2 \dfrac{1 + m^2}{1 - m^2}} = 1.$$

Si $m^2 < 1$, il n'y a pas de coupe.

Pour $m = 1$, c'est-à-dire, pour les plans représentatifs des isotropes, nous sommes dans la position limite, les axes de l'ellipse deviennent infiniments grands, ce qui est une conséquence du caractère asymp-

totique de ces plans par rapport à la surface : une rotation infinitésimale des plans en question donnerait une section elliptique. Les petits axes de ces ellipses sont, évidemment, les segments qui unissent l'origine O aux points de l'hyperbole (34). (Voyez fig. 50). Quant aux grands axes ils sont limités aux points de l'axe de X où le plan sécant résulte tangent à la surface. Voyez plus bas la note du numero 152.

149. Les plans qui passent par l'axe des Y, coupent lieu suivant des courbes dont les équations, s'obtiennent en remplaçant dans (30) et (31), Z par mX. On obtient, pour (31)

$$X^2(1-m^2)+Y^2-\frac{m^2X^4}{Y^2}=r^2, \qquad (a)$$

et si l'on veut rapporter cette courbe à un nouveau axe X′ situé dans son plan, soit à l'intersection de ce dernier avec le plan des ZOX, il suffira de remplacer, dans l'équation, X par $X'\sqrt{1+m^2}$. Toutes ces courbes, considérées relativement à la surface (31), contiennent l'origine O comme point double isolé; mais étant donné que ce point n'a pas de cote réelle il n'appartient pas au lieu (30). Toutes les coupes contiennent aussi, avec la cote nulle, les points A et B (fig. 41 et 50) qui sont les sommets des courbes. Nous avons :

$$\frac{dY}{dX'}=XY\frac{2X^2m^2-Y^2(1-m^2)}{m^2X^4+Y^4}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=$$

$$=\frac{Y}{X}\frac{2m^2-\left(\frac{Y}{X}\right)^2(1-m^2)}{m^2+\left(\frac{Y}{X}\right)^4}\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}. \qquad (b)$$

Cette expression s'annule pour les sommets A et B ($X=0$, $Y=\pm r$) et prend la forme indéterminée pour le centre O (point double isolé de (31)); mais elle peut s'annuler aussi, quand $m<1$, pour les points qui remplissent la condition

$$2X^2m^2=Y^2(1-m^2).$$

On trouve alors sans difficulté comme valeur des ordonnées de ces points

$$Y=\pm\frac{2rm}{1+m^2}. \qquad (c)$$

Ce sont des points de *minima* de la courbe par rapport à l'axe des X′.

En écrivant l'équation (*a*) de la coupe ainsi :

$$(mX)^2(1 - m^2) + (mY)^2 - \frac{(mX)^4}{Y^2} = (mr)^2,$$

on vérifie aisément qu'elle est satisfaite pour les coordonnées des points à l'infini des droites d'intersection du plan de la courbe par les plans t

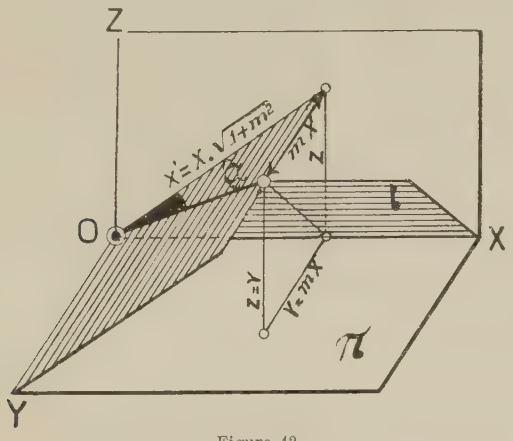


Figure 42

représentatifs des isotropes; soit, pour les conditions, $Z = m \pm Y = \pm \infty$; car on peut écrire alors l'équation ainsi

$$Y^2(1 - m^2 + m^2 - 1) = (mr)^2 \qquad \text{soit} \qquad \infty^2 . 0 = (mr)^2.$$

Les coefficients angulaires des tangentes en ces points, s'obtiennent en traitant de la même façon l'équation (*b*); et l'on trouve, pour ces valeurs, $\pm \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}$ qui sont celles qui expriment les inclinaisons, par rapport à l'axe de X′, des dites droites d'intersection (voyez fig. 42) ce qui fait bien voir que ces droites sont des asymptotes des courbes de coupe.

Nous avons calculé quelques points de la coupe qui correspondent à $m = 0{,}2$. Voici les résultats en prenant r pour unité.

Équation de la courbe en projection :

$$\frac{0.96}{1.04} X'^2 + Y^2 - \frac{0.04X'^4}{(1.04Y)^2} = 1,$$

valeurs de X′,

$$0,\quad 0.445,\quad 0.877,\quad 1.40,\quad 2.85,\quad 4.47,\quad 5.09;$$

valeurs correspondantes de Y,

$$1,\quad 0.9,\quad 0.6,\quad 0.39,\quad 0.6,\quad 0.9,\quad 1.$$

Il faut considérer les doubles signes pour chacunes de ces valeurs.

L'équation (*c*) donne comme coordonnées du point T de *minima*

$$\begin{cases} X = 1.40 \\ Y = 0.39 \end{cases}.$$

Figure 43

Nous avons dessiné cette courbe (fig. 43).

La section qui donne une équation la plus simple, est celle à 45°, pour laquelle $m = \pm 1$. Nous avons alors

$$X'^4 = 4Y^2 (Y^2 - r^2).$$

Nous avons calculé quelques points de cette courbe en prenant r pour unité.

Valeurs de X,

$$0,\quad 1.00,\quad 1.37,\quad 1.68,\quad 2.21,\quad 2.63,\quad 2.98,\quad 3.31,\quad 3.59,$$

valeurs correspondantes de Y,

$$1,\quad 1.10,\quad 1.25,\quad \sqrt{2} = 1.41,\quad \sqrt{3} = 1.732,\quad 2.00,$$
$$\sqrt{5} = 2.236,\quad \sqrt{6} = 2.45,\quad \sqrt{7} = 2.646.$$

La figure 44 indique la forme de la courbe (la moitié d'une des branches).

150. Il nous convient encore de chercher les coupes par des plans parallèles aux principaux. Commençons par ceux qui sont parallèles

au plan de base, Z = constante. Voici une table qui, si l'on prend le rayon r comme unité, donne les valeurs de X et de Y pour les valeurs de $Z = \pm\frac{1}{2}$ et ± 1 :

	X	Y
$Z = \pm\frac{1}{2}$	0	$\pm 1{,}11$
	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm 1{,}023$
	± 1	$\pm 0{,}8$
	± 2	$\pm 0{,}57$
	± 4	$\pm 0{,}516$

	X	Y	X	Y
$Z = \pm 1$	0	$\pm 1{,}41$	± 10	$\pm 1{,}005$
	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm 1{,}37$	± 100	$\pm 1{,}00005$
			± 1000	$\pm 1{,}0000005$
	± 1	$\pm 1{,}27$	± 10000	$\pm 1{,}000000005$
	± 2	$\pm 1{,}11$		
	± 3	$\pm 1{,}05$		
	± 4	$\pm 1{,}03$		

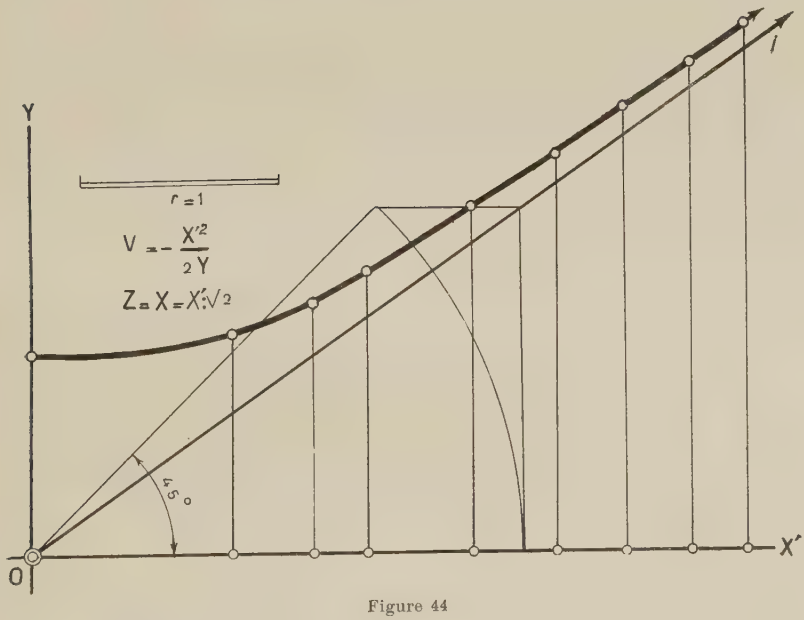


Figure 44

En général, pour une valeur quelconque Z_0 de Z, la courbe a des sommets dans le plan YOZ, aux points correspondants de l'hyperbole (34) $Y^2 - Z^2 = r^2$ de ce plan, et pour ces sommets on a $Y = r^2 - Z^2$. De ces sommets partent des branches infinies symétriques par rapport à ce plan; ces branches sont de nature hyperbolique et s'approchent asymptotiquement des bissecteurs relatifs aux isotropes $Y = \pm Z$. Leurs asymptotes sont, en effet, les intersections du plan de la courbe

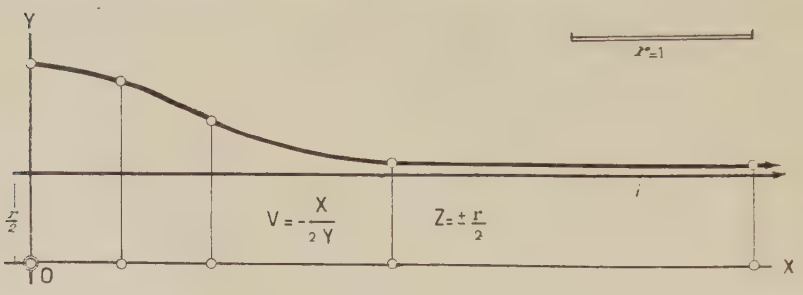


Figure 45

que l'on considère $Z = Z_0$, avec les bissecteurs en question. Cela est, évidemment, une conséquence de ce qui a été déjà dit plus haut, mais on peut naturellement, si on le desire, le démontrer directement (1). Les figures 45 et 46, a même echelle, indiquent les coupes calculées.

(1) De (31) on obtient :

$$2Y^2 = r^2 - X^2 + Z^2 \pm \sqrt{(r^2 - X^2 + Z^2)^2 + 4X^2Z^2}.$$

Developpant la quantité radicale d'après la loi du binôme on trouve,

$$\sqrt{[-(Z^2 - X^2 + r^2)] + 4X^2Z^2} = -(Z^2 - X^2 + r^2)\left\{1 + \left[\frac{X^2Z^2}{-(Z^2 - X^2 + r^2)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -(Z^2 - X^2 + r^2)\left\{1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2XZ}{(Z^2 - X^2 + r^2)}\right]^2 + \dots\right. =$$

$$= -(Z^2 - X^2 + r^2) + \frac{2X^2Z^2}{Z^2 - X^2 + r^2} + \dots$$

Donc, on peut écrire

$$Y^2 = \frac{X^2Z^2}{-(Z^2 - X^2 + r_2)} + \dots = \frac{Z^2}{\dfrac{Z^2 + r^2}{X^2} - 1} + \dots$$

Quand X tend vers l'infini, Y tend vers $\pm Z_0$ car le terme suivant du developpement est en effet

$$-\frac{1}{4}\frac{(2XZ)^4}{[-(Y^2 - X^2 - r^2)]^3} = \frac{4Z^2}{\left[\dfrac{Z^2 + r^2}{X^2} = 1\right]^3 X^2},$$

qui tend à s'annuler quand X tend vers l'infini. Et, de même les termes suivants. Il ne reste ainsi que le premier dont le dénominateur tend vers -- 1.

151. Les coupes par des plans parallèles à l'YOZ, plans dont les équations sont $X = \text{constante} = X_0$, si X_0 est moindre que r, donnent deux branches séparées ayant leurs sommets aux points où le plan sécant coupe la circonférence $X^2 + Y^2 = r^2$ du plan de base. Pour $X = r$, Y étant nul, Z résulte aussi nul, ce qui indique que les sommets des deux branches antérieures, se sont reunis. Il en arrive de même pour $|X_0| > r$. De l'équation (31) on déduit, X étant la constante X_0

$$\frac{dY}{dZ} = ZY\,\frac{Y^2 + X_0^2}{Y^4 + X_0^2 Z^2} = \frac{Z}{Y}\,\frac{Y^2 + X_0^2}{Y^2 + X_0^2\left(\frac{Z}{Y}\right)^2}, \tag{36}$$

qui s'annule pour $Z = O$ si l'on n'a pas simultanément $Y = O$, ce qui signifie que, aux sommets qui correspondent à $|X_0| < r$, et $Z = O$ la

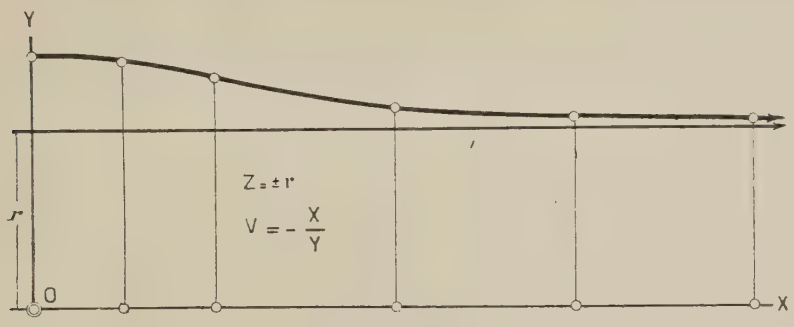


Figure 46

tangente à la courbe est parallèle à l'axe de Z (cela correspond, donc, aux valeurs de X_0 compris entre O et r, comme limites mathématiques) car nous avons vu que, pour ces cas, Y n'est pas nul. Relativement au plan YOZ lui même, qui correspond à $X_0 = O$, nous avons vu plus haut (n° 142) qu'il coupe la surface (31) suivant, de même, l'axe des Z comme droite double.

Pour le point O de cet axe, soit, pour l'origine des coordonnées, on a simultanément dans (36), X_0, Y et Z nuls ce qui donne à $\frac{dY}{dZ}$, la forme indéterminée $\frac{Z}{Y}$. Mais si dans (31) on isole le terme $\frac{X^2Z^2}{Y^2}$, puis en faisant $X = X_0$, on suppose que Y et Z s'évanouissent, on obtient le rapport limite

$$\left(\frac{Z}{Y}\right)^2 = \frac{X_0^2 - r^2}{X_0^2} \qquad \therefore \qquad \frac{Z}{Y} = \pm\,\frac{\sqrt{X_0 - r_2}}{X_0}, \tag{37}$$

qui prend la valeur infinie pour $X_0 = 0$; donc, pour (36), on obtient comme vrai valeur, la valeur infinie, ce qui signifie que la tangente a la coupe en O est bien perpendiculaire au plan de base, et double, comme il le fallait.

152. Si on suppose $|X_0| > r$, nous avons vu que l'on a, pour Z nul, Y également nul; et la formule (36) devient à nouveau indéterminée: mais si on y remplace $\frac{Z}{Y}$ par la valeur (37), on obtient

$$\frac{dY}{dZ} = \pm\sqrt{\frac{X_0^2 - r^2}{X_0^2}}\,\frac{X_0^2}{X_0^2 - r_2} = \pm\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 - r^2}}$$

qui donne l'inclinaison, par rapport à l'axe des Z, des tangentes aux deux branches de la courbe de coupe au point de croisement sur l'axe de X (¹).

Pour $X_0 = r$ nous obtenons une seule tangente d'inclinaison infinie, ce qui veut dire que cette tangente unique est parallèle à l'axe des Y.

Ainsi, aux points C et D (fig. 41) de l'axe des X nous avons un changement brusque dans les inclinaisons des tangentes aux sections considérées. Depuis l'origine O jusqu'à ces points nous avions, dans le plan de base, des sommets situés aux points de la circonférence $X^2 + Y^2 = r^2$, où les deux tangentes symétriques sont parallèles à l'axe de Z; puis, sans transition, aux deux points C et D les tangentes se confondent en une seule parallèle à l'axe des Y, c'est-à dire, de direction perpendiculaire aux antérieures. Puis on a des points doubles où les branches se croisent, et deux tangentes, une à chaque branche symétrique, d'inclinaison variable avec le plan de base en commençant, après les points C et D, par un angle infiniment petit et augmentant

(¹) Nous avons dit plus haut (n° 148) que les ellipses sections de la surface (31) avec les plans $Z = mY$ qui passent par l'axe des X, ont leur sommets aux points de cet axe où ces plans sont tangents à la surface. Et en effet, l'équation précédente, appliquée à une tangente d'inclinaison m par rapport au plan de base donné

$$\pm\frac{X_0}{\sqrt{X_0^2 - r^2}} = \frac{1}{m}; \qquad \text{donc} \qquad X_0 = \pm\frac{r}{\sqrt{1 - m^2}}$$

longueur qui est précisément (voir n° 148) celle du demi-grand axe de l'ellipse de coupe de la surface (31) par le plan $Z = mY$. Or ce plan contient l'axe des X, lequel fait partie de la surface (31) et est, comme on le voit, la tangente à une des branches de la section de la même surface par le plan $X = X_0$; il est donc bien le plan tangent a (31) au point X_0 de l'axe en question.

progressivement de sorte que les angles formées avec le plan de base s'approchent de 45° comme limite mathématique quand X_0 croît indéfiniment. En effet, pour X_0 infiniment grand on a $\frac{dY}{dZ} = \pm 1$. Ce résultat fait de nouveau voir que les plans à 45° représentatifs des isotropes, sont bien asymptotiques a la surface (31).

Du reste l'équation (31) résolue par rapport à Y^2 comme à la note du numero 150 (pag. 200) et écrite sous la forme

$$\frac{2Y^2}{Z^2} = 1 - \frac{X^2 - r^2}{Z^2} \pm \sqrt{\left[1 - \frac{X^2 - r^2}{Z^2}\right]^2 + \frac{4X^2}{Z^2}}$$

montre bien que, pour une valeur déterminée X_0 de X, le rapport $\frac{Y}{Z}$ tend vers ± 1 quand Z tend vers l'infini; ce qui veut dire que ces droites $Y = \pm 1$, intersections du plan $X = X_0$ avec les [illegible] représentatifs des isotropes, sont en effet les asymptotes de la courbe d'intersection de la surface avec ce plan $X = X_0$.

(Continuará.)

LUIS LUIGGI

(1856-1931)

Ha fallecido en Roma, el 1° de febrero ppdo., el miembro correspondiente de esta Academia, ingeniero don Luis Luiggi. Nacido en Génova, 75 años ha, en esa ciudad hizo sus primeros estudios, pero es en el Politécnico de Turín donde se graduó de ingeniero, en 1878. Después de hacer su servicio militar en la artillería de costas, ganó un concurso entre 212 ingenieros siendo enviado a Inglaterra para perfeccionarse en la construcción de puertos y canales; con tal motivo, visitó los puertos más importantes de ese país, de Francia, Bélgica y Alemania. Vuelto a Génova, se distinguió en el cuerpo de ingenieros civiles, colaborando durante doce años, hasta 1895, en la dirección de las obras de ensanche del puerto: diques de carena, rompeolas, murallas de atraque de grandes buques, etc. En 1895 tenía ya fama europea en la especialidad de construcción de diques. Era a la sazon ingeniero jefe del Genio civil italiano (sección puertos) y director de las obras del puerto de Liorna. Acababa de proyectar diques de carena para Spezzia, Tarento y Palermo. Anteriormente había construído varios faros para las costas toscanas, así como preparado un plantel de « ferry-boats » entre Reggio y Mesina. Era asesor técnico particular del Ministro de Obras públicas de Italia.

No hay que extrañarse, pues, que el Gobierno argentino, presidido en aquel entonces por el doctor José Evaristo Uriburu, siendo ministro de Guerra y Marina el ingeniero Guillermo Villanueva, le contratase para la construcción de un gran puerto militar, obra impuesta por la reciente compra de grandes acorazados. Ese nombramiento fué muy bien recibido, como puede verse leyendo, por ejemplo, los artículos publicados entonces en la *Revista técnica*, por el ingeniero Santiago E. Barabino (t. I, pág. 156).

Llegó el ingeniero Luiggi a Buenos Aires en febrero 1896. Su primera misión fué eligir la ubicación del puerto a construirse, optando, después de recorrer la costa hasta Cabo Vírgenes, por la posición de Bahía Blanca. Allí decidióse construir, no sólo un dique de carena para buques de la armada, sino establecer, además, un puerto militar definitivo, con todas sus secciones y accesorios. El 2 de diciembre 1897 sancionaba el Congreso la ley (n° 3450) autorizando las obras, e inmediatamente después se dieron principios a los estudios complementarios indispensables para fundar el definitivo, que fué terminado a mediados de 1897. En cuanto a los trabajos preliminares, empezaron en marzo de 1897, y en mayo del año siguiente los definitivos. En los primeros días de enero de 1902 estaba el dique construído, entrando en él el acorazado *San Martín;* y el 8 de marzo siguiente, era aquél oficialmente inaugurado.

El ingeniero Luiggi permaneció en el país hasta 1905. Además del dique (que tiene 225 metros de largo, 27 de ancho y 10,50 de hondo) proyectó y dirigió la construción de oficinas, talleres, almacenes, cuarteles para el personal, hospital naval, obras de defensa de la entrada al puerto y demás servicios accesorios. También se ajustan a planes trazados por Luiggi las obras complementarias de Puerto Belgrano, Mar del Plata y Tierra del Fuego, como ser: semáforos, teléfonos estratégicos, faros, estaciones navales secundarias de Puerto Deseado y Río Santa Cruz, apostaderos en Mar del Plata, San Blas, Golfo Nuevo, etc.

Mientras permaneció entre nosotros fué asesor del gobierno, y su opinión tenida en cuenta al realizarse varias obras importantes como las del puerto de Buenos Aires y el de Rosario (en 1901).

En noviembre 1902 dió, por pedido del presidente del Centro nacional de ingenieros, don Emilio Mitre, una conferencia en el local de esa sociedad; y en ella, con el título de *Reminiscencia del Puerto Militar,* hizo un resumen de los trabajos realizados, manisfestando al terminar que, en menos de seis años, habíase llevado a cabo aquí lo que en Spezzia y Dover requirió más de medio siglo, y ello a pesar de las dificultades por las que pasó el país y, sobre todo, de haberse abonado las obras con los fondos del presupuesto.

El 31 de marzo, terminada su misión, se despedía Luiggi en Puerto Militar de sus colaboradores. Lo hizo con una sentida «orden general» que terminaba con estas palabras: «No os digo adiós, sino más bien *arriverderci,* según nos recuerda el lema del Puerto Militar: *La mar no divide, une*».

Con motivo de la partida de Luiggi, se hizo presente en nuestras revistas técnicas que, aun cuando pudiese disentirse respecto de algunos de los trabajos ejecutados y de su manera de encarar las cuestiones administrativas, debía en definitiva reconocerse el celo, dedicación e inteligencia que había demostrado en el desempeño de su misión.

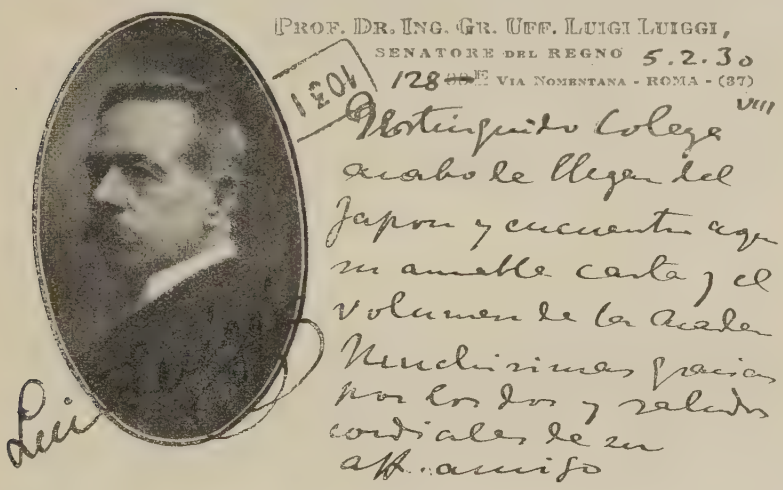
Vuelto a Italia continuó desempeñando allí importantes funciones públicas. Anotaremos algunas: miembro del Consejo de administración de los ferrocarriles (hasta 1910); miembro del Consejo superior de Instrucción pública (de 1914 a 1922); director de Construcciones hidráulicas y marítimas de la Real escuela de ingeniería de Roma, cargo que desempeñó durante 18 años, actuando como tal en obras realizadas en los citados puertos de Génova Spezzia, Liorna, y también de Massaua, Tripoli, Bengasi, Homs, Derna. Fué también presidente del Comité central de riego. Había sido asesor del gobierno uruguayo para el puerto de Montevideo; fué después consultor de los gobiernos de Egipto y de Italia para los puertos de las costas africanas y asesor de los gobiernos de Rumania y Albania. Miembro de la Comisión internacional del canal de Suez, era veedor del funcionamiento de dicho canal. Fué presidente del Comité central de riego. En suma, por solicitación especial de los respectivos gobiernos, proyectó los puertos de Alejandría, Mogadixo, Mersnina, Rodi, Damieta, Brava, Durazzo, etc., etc. En Bélgica, en Holanda y en Alemania, su competencia era reconocida sin discusión; en 1924 se le confió la misión de examinar la navegabilidad del Danubio y proponer las reformas adecuadas.

En otro orden de actividades representó al gobierno italiano en varios congresos científicos en París, Londres, Froncoforte, Bruselas, Viena, Petrogrado, Filadelfia. Mientras residió aquí publicó varios trabajos, entre los cuales: *Defensas de las costas atlánticas de la República Argentina* (en 1926); *Los faros de las costas argentinas,* que presentó al Congreso latino-americano de Montevideo en 1902; *El gran dique de carena del Puerto Militar de Bahía Blanca,* para el Congreso de Düssendorf (1902); *Precauciones para el empleo del cemento armado en obras marítimas* (Congreso científico de Buenos Aires en 1910).

Poseía, naturalmente, muchos títulos y distinciones. Era socio extranjero honorario de la « British Association » de Londres, siendo designado como « su huesped » en el Congreso de Australia; miembro de la « American Society of Civil Engineneers ». Pertenecía a numerosas sociedades científicas italianas, inglesas, estadounidenses,

australianas, etc. Era presidente honorario del Consejo nacional de trabajos públicos en Italia; profesor de la Escuela de ingenieros de Roma; presidente de la Universidad comercial de Génova; doctor *honoris causa* de la Universidad de Melbourne. Su patria le hizo diputado primero, y en 1924 senador vitalicio.

Después de su partida en 1905, volvió a la Argentina a fines de 1909, en ocasión del primer centenario de nuestra independencia, habiéndole encomendado el Gobierno italiano varias gestiones que se relacionaban con la concurrencia de aquella nación a las exposiciones. Volvió nuevamente, en septiembre 1928, en ocasión de la inau-



guración del monumento a Belgrano en Rosario; ese monumento es fiel reproducción del levantado en Génova, y en cuya erección tomó Luiggi una activísima intervención. Con motivo de esta última visita. el Centro Nacional de Ingenieros le dió el título de socio honorario, primera distinción de esa naturaleza acordada por esa Sociedad. Desde tiempo atrás era socio correspondiente, en Roma, de la Sociedad Científica Argentina.

En cuanto a nuestra Academia, le designó miembro correspondiente en su sesión del 22 de septiembre 1917, nombramiento ratificado en la del 28 de abril 1918, por haberse omitido dejar constancia de aquél en el acta respectiva. Cuando más tarde, en 1926, se hizo cargo de la secretaría de la Academia el doctor Dassen, se encontró con que el diploma no le había sido remitido; cumplida en seguida esa diligencia, Luiggi contestó con dos cartas, una escrita en idioma

castellano, dirigida personalmente al doctor Dassen, y otra para la Academia, escrita en idioma italiano. Por ser las últimas recibidas del ingeniero Luiggi, transcribimos una y otra, así como también reproducimos facsimilarmente la tarjeta postal por la que comunica haber recibido el último número de los Anales de la Academia. Esta postal estaba dirigida al Director de los *Anales :*

Roma 16. XI. 27

Distinguido Colega :

He escrito la nota de agradecimiento en italiano, porque me queda mas fácil. Le ruego de explicar esto a los Colegas de la Academia : porque tengo muchísimo a honor la distincion que me otorgaron.

Espero poder ir a la Argentina en el año próximo y renovar la antigua amistad con los Ingenieros Argentinos de los cuales tengo buenos recuerdos.

Le saludo muy atentamente

S. S. S. y amigo

Luis Luiggi.

Roma, 15 Nov. 1927.

Illustre Collega :

Il ricordo dei buoni Amici e Colleghi di Buenos Aires mi fa sempre grandissimo piacere, perchè ho passato nell'Argentina i migliori anni della mia vita — dai 38 ai 49 anni — e ne conservo il più gradito ricordo.

Nel caso attuale, il ricordo dei Colleghi dell'« Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales» mi è gratissimo e quasi mi commove.

A Lei, ai Colleghi dell'Academia, invio i miei migliori ringraziamenti per l'alto onore che mi conferiscono, ed i più vivi auguri per la prosperità dell'Academia e dei suoi illustri componenti.

Con saluti cordiali

Devotisimo

Luigi Luiggi.

Illustre Sig. Ing. Dr. Claro C. Dassen
Academia de Ciencias Exactas de Buenos Aires.

Sincero amigo y admirador entusiasta de la Argentina, la muerte del ingeniero Luiggi ha sido muy lamentada entre nosotros y el recuerdo de su actuación y de su figura, será evocado siempre con la mayor simpatía y respeto.

C. C. D.

LA CORRELACIÓN DE LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA

Y DE LAS PRECIPITACIONES CON LAS MANCHAS SOLARES

Por ALFREDO JATHO
Colegio Germania, Buenos Aires

Dedicamos este trabajo a la Primera Reunión Nacional de Geografía, para la cual fué preparado, formando la continuación de nuestro estudio sobre el Regimen Pluviométrico (1), *presentado a la misma Reunión.*

RÉSUMÉ

Correlation de la pression atmosphérique et des précipitations, avec les taches solaires. — La période moyenne des taches solaires étant de onze ans, les écarts des valeurs observées d'un phénomène météorologique dus à la variation de la radiation solaire, doivent se détruire quand on forme les valeurs moyennes de onze valeurs consécutives. Ces valeurs moyennes fournissent la courbe séculière ou courbe-axe, libre ainsi des variations de la radiation solaire de la période de onze ans. L'auteur détermine une seconde courbe qui remplace celle des valeurs observées du phénomène météorologique. Il l'obtient en faisant la moyenne de cinq valeurs consécutives et il la nomme courbe apicale en raison de la formule employée pour sa détermination. Les différences des ordonnées de la courbe apicale et de la courbe-axe, déterminent une troisième courbe qui réfléchit l'influence de la variation de la radiation solaire sur le phénomène météorologique et, par cela, peut s'appeler onde solaire météorologique. Il trouve que cette onde est très semblable à la courbe des déviations des taches solaires quand le phénomène se realise d'une manière bien regulière.

On peut établir les deux règles suivantes : 1re La corrélation solaire-barométrique est grande dans les régions et à l'époque où il y a du calme barométrique. Il y a du calme barométrique dans la zone équatoriale (Colombo, Batavia, Manille), et en hiver dans les zones de haute pression atmosphérique (Littoral Ar-

(1) Este trabajo, cuyo título completo es : *El Régimen Pluviométrico, estudiado por el método de ordenación de las precipitaciones en serie ascendente, con aplicación especial a la Argentina,* se publicará próximamente.

gentin, Madagascar, Centre de la Sibérie); 2me La corrélation solaire-pluviométrique est grande dans les régions et à l'époque où existe un régime bien défini des vents qui apportent les pluies (Littoral Argentin en été, Madagascar et La Nouvelle Zélande en hiver). Il y a aussi haute corrélation solaire-pluviométrique dans les régions où les pluies sont produites par le mouvement ascensionnel de l'air, provoqué par la radiation solaire (Mendoza, zone équatoriale). Les précipitations de l'Inde s'étudient séparément. L'auteur discute le signe algébrique du coefficient de corrélation qui correspond dans chaque cas, au phénomène météorologique respectif.

L'auteur déduit de ses résultats que dans les cas les plus simples les variations de la pression atmosphérique et surtout des précipitations se réalisent à l'unisson avec le nombre des taches solaires.

INTRODUCCIÓN

Cuando se hubo descubierto el estrecho paralelismo que existe entre las desviaciones de la aguja magnética y el número de las manchas solares, era natural buscar relaciones análogas entre éstas y los fenómenos meteorológicos. Por mucho tiempo, sin embargo, no se logró obtener resultados sino muy poco satisfactorios, de modo que se arraigó en los círculos científicos la opinión de que era imposible correlacionar ambas clases de fenómenos, sea por la exigüidad de las variaciones de la radiación solar, sea por la complicación de los fenómenos meteorológicos. Pero el problema, una vez planteado, tenía una importancia demasiado grande para no seguir suscitando la sagacidad de los investigadores. Sus esfuerzos continuados no han quedado estériles. En efecto, basados en materiales más amplios, se han realizado en los últimos años varios estudios de valor indiscutible, de modo que el escepticismo anterior empieza a perder terreno. Indicaremos algunos de estos resultados.

W. Köppen publicó, en 1914, un gran trabajo en el cual demostró que, durante los cinco períodos de las manchas solares, de 1878 a 1905, en la zona tropical, considerándola como una sola unidad y formando los promedios, la temperatura, en los años de frecuencia máxima de las manchas solares, fué de 0,4 grados menor que en los de frecuencia mínima, observándose una diferencia algo menor en las zonas subtrópicales. En un trabajo más reciente, L. Mecking indica que en el interior de Norte América los años con manchas numerosas son varios grados más fríos que los con escasas manchas; mientras que en la costa atlántica de Europa rige la razón opuesta, aunque aquí el aumento de la temperatura no importa más que unos décimos de grado.

El meteorólogo que con mayor éxito se ha dedicado a esta clase de estudios es H. H. Clayton, antes perteneciente a la Oficina Meteorológica Argentina. A él se debe el método de los pronósticos semanales, que actualmente se practican para el litoral argentino por su antiguo colaborador G. Hoxmark, publicándose dos veces por semana en el diario *La Nación*. De entre las múltiples publicaciones de Clayton, no citaremos más que su libro *World Weather*, que es como un *Standard Work* para los que quieren estudiar los efectos de las variaciones de la radiación solar sobre los fenómenos meteorológicos.

A la obra de tan eximios sabios, queríamos agregar el presente breve trabajo nuestro. ¿Será osado, si esperamos que también él sea digno de la consideración de los estudiosos?

Séanos permitido caracterizar nuestro trabajo con unas pocas palabras. Para la mayoría de los lugares, la correlación solar-meteorológica es muy confusa. Nuestros predecesores, por lo general, evitan esta dificultad formando los promedios para un gran número de lugares; sus estudios son trabajos de estadística. Nosotros, al contrario, nos hemos preguntado si no es posible encontrar lugares determinados, en los cuales el régimen meteorológico sea tan sencillo que pueda imprimirle su ley la radiación solar. Mostraremos que los hay, e indicaremos las razones por las cuales se realiza en ellos esa correlación. En cuanto al método, nuestro trabajo se distingue de los anteriores en que separaremos de la curva meteorológica una componente que podemos llamar onda solar. Ésta no rara vez se parece de un modo sorprendente a la curva de las desviaciones de las manchas solares, y permite además efectuar el cálculo de correlación de la única manera que debemos considerar correcta.

CAPÍTULO I

Parte preparatoria

1. LA SEPARACIÓN DE LA ONDA SOLAR

Sea la curva AA simétrica respecto a sus puntos de intersección C con un eje que, para mayor generalidad, supondremos inclinado (fig. 1). Entonces, si sumamos 11 ordenadas consecutivas $y_{n+1} = P_{n+1}Q_{n+1}$, $y_{n+2} = P_{n+2}Q_{n+2}$, ..., $y_{n+11} = P_{n+11}Q_{n+11}$, se destruirán sus desviaciones del eje $v_1 = P_{n+1}E_{n+1}$, $v_2 = P_{n+2}E_{n+2}$, ..., $v_{11} = P_{n+11}E_{n+11}$. Luego, el cociente de esta suma dividido por 11 dará la ordenada del

punto intermedio E_i del eje. Por lo tanto, tendremos como ecuación del eje

$$y = \frac{1}{11} \sum_{k=-5}^{k=+5} P_k Q_k,$$

o también

$$y = \frac{1}{11} \sum_{1}^{11} y_k.$$

Si aplicamos esta fórmula a una curva meteorológica, no obtendremos, por lo general, como eje, una línea recta sino una curva. Esta

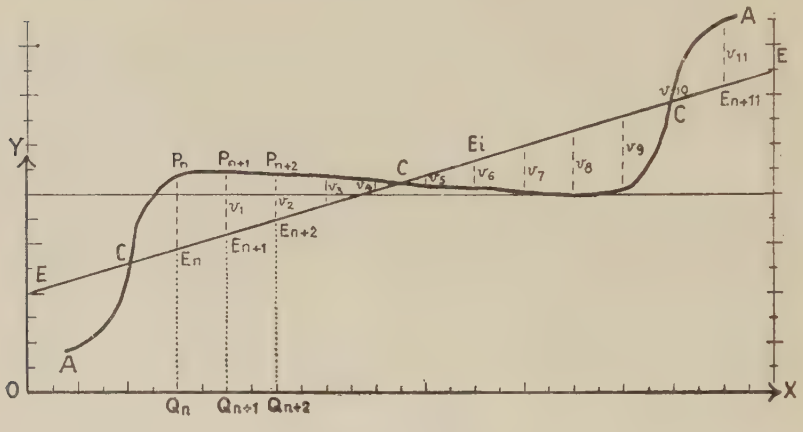


Fig. 1. — Curva meteorológica ideal, simétrica respecto a los centros C

curva estará afectada de pequeñas incisiones. Pues : primero, la curva de las manchas solares, que suponemos reproducida de un cierto modo en la curva meteorológica, se compone de períodos que, en el tiempo por nosotros estudiado, oscila entre 10 y 13 años; y segundo, no es completamente simétrica la curva de las manchas.

Para eliminar estas pequeñas irregularidades, promediaremos cada tres ordenadas consecutivas, y obtendremos como fórmula definitiva de la *curva-eje* (curva secular)

$$y = \frac{1}{33} \sum_{1}^{3} \sum_{1}^{11} y_k. \qquad (1)$$

Por lo general, la curva meteorológica AA será muy irregular. Debemos promediar sus coordenadas consecutivas, recomendándose promediar cada vez 5 valores, por ser 5 casi la mitad del número 11 del

período de las manchas solares. La fórmula comúnmente usada para promediar 5 valores es

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5}{5}$$

o sea

$$y = \frac{1}{5}\sum_1^5 y_k.$$

Sin embargo, esta fórmula quita demasiado la individualidad a las ordenadas promediadas, es decir, las nivela demasiado. Pero también podemos promediar 5 valores consecutivos, si primero promediamos 3 de ellos, y luego otra vez cada 3 valores de la primera promediación. Para promediar las ordenadas de las curvas meteorológicas hemos usado, por lo tanto, en nuestro trabajo, la fórmula

$$y = \frac{1}{9}\sum_1^3\sum_1^3 y_k,$$

o sea

$$y = \frac{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_5}{9}. \qquad (2)$$

Como se colegirá de esta fórmula, el valor promediado que corresponde a y_3, se levanta en forma piramidal sobre los valores y_1, y_5 e y_2, y_4. Llamaremos, por lo tanto, *curva apical* a la expresada por la fórmula (2); la cual, en todos los casos que estudiaremos, reemplazará a la curva de los valores observados. Las desviaciones de la curva apical de la curva-eje se obtendrán por la fórmula

$$v = \frac{1}{9}\sum_1^3\sum_1^3 y_k - \frac{1}{33}\sum_1^3\sum_1^{11} y_k. \qquad (3)$$

Llamaremos *onda solar-meteorológica,* o más brevemente *onda solar,* a la curva representada por la fórmula (3), pues ella indica la influencia de la radiación solar en la curva meteorológica.

Hemos aplicado este mismo método para calcular las desviaciones u de los números N de las manchas solares de su curva-eje, pero en forma simplificada, por ser más regular la curva de los números de las manchas solares. Calcularemos las desviaciones de las manchas solares por la fórmula

$$u = \mathrm{N} - \frac{1}{11}\sum_1^{11} \mathrm{N}_k. \qquad (4)$$

Según los estudios de Clayton, la influencia mayor de la radiación solar que acompaña una mancha solar en los fenómenos meteorológicos, es posterior medio mes al día de encontrarse la mancha en el meridiano central del Sol. Por consiguiente, para correlacionar los fenómenos meteorológicos, por ejemplo las precipitaciones de verano (meses Dic. + En. + Feb.), con el número de las manchas solares, hemos incluído en la suma de éstas el número del mes anterior, en nuestro ejemplo hemos formado pues, $N = \frac{1}{4}$(Nov. + Dic. + En. + Feb.), siendo Nov. + Dic. + En. + Feb. la suma de los números de las manchas de los meses correspondientes.

2. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Debemos determinar por un número exacto la concordancia que admitimos que existe entre los fenómenos meteorológicos y el número de las manchas solares. Para esta clase de cálculos es costumbre calcular el llamado coeficiente de correlación. Como no podemos suponer que la mayoría de los lectores de los *Anales* conozca este método, lo explicaremos brevemente.

Primer caso : Sean dos curvas de coordenadas u y v proporcionales, por ejemplo $u = 2 \cdot v$ (fig. 2*a*). El coeficiente de correlación de las dos curvas se expresa por la fórmula

$$r = \frac{\Sigma uv}{\sqrt{\Sigma u^2 \cdot \Sigma v^2}}.$$

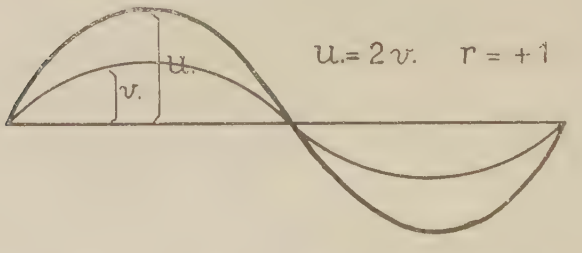


Fig. 2*a*. — Curvas de correlación positiva perfecta

En nuestro ejemplo ($u = 2v$), resultará

$$r = \frac{\Sigma 2v \cdot v}{\sqrt{\Sigma 4v^2 \cdot \Sigma v^2}} = 1.$$

Segundo caso : Sean dos curvas de ordenadas u y v proporcionales pero con signo opuesto, por ejemplo $u = -2 \cdot v$ (fig. 2*b*). Tendremos

$$r = \frac{\Sigma -2v \cdot v}{\sqrt{\Sigma 4v^2 \cdot \Sigma v^2}} = -1.$$

Tercer caso : Sean dos curvas como las indicadas en la figura 2*c*. Se verá entonces en seguida que $\Sigma uv = 0$, luego también $r = 0$.

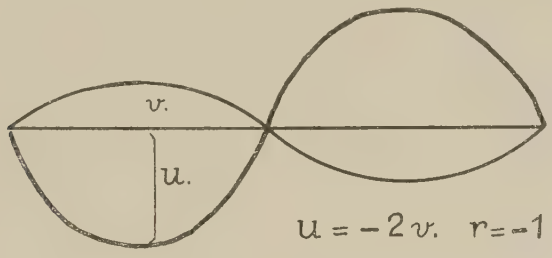


Fig. 2*b*. — Curvas de correlación negativa perfecta

Luego, el coeficiente r puede oscilar entre $+1$ y -1. $r = +1$ significa correlación perfecta positiva, $r = -1$ correlación perfecta negativa, $r = 0$ correlación nula. Cuanto más, en un caso dado, r se acerque a la unidad (positiva o negativa), mejor será la correlación.

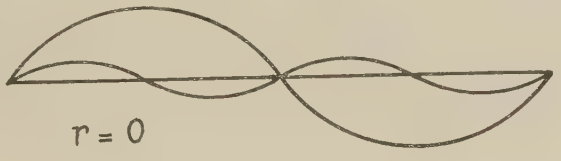


Fig. 2*c*. — Curvas de correlación nula

El valor de r, obtenido en un caso particular, tendrá mayor probabilidad de ser una medida adecuada, cuanto mayor es el número n de los valores correlacionados. El error probable de r se calcula mediante la fórmula

$$e = \frac{0{,}674 \cdot (1 - r^2)}{\sqrt{n}}.$$

Cuando r es 5 o más veces mayor que e, la correlación se considera como muy buena.

3. EJEMPLO : LAS PRECIPITACIONES DE VERANO EN MENDOZA

Ilustraremos lo expuesto con el ejemplo de las precipitaciones de verano (D. + E. + F.) observadas en Mendoza. El cálculo de su correlación con las manchas solares se realiza según el siguiente cuadro :

D+E+F	Precipitaciones observadas en milímetros	Cálculo de la curva-eje				Cálculo de la curva apical			Desviación (A — B) v	Desviación de manchas solares u	Cálculo de correlación		
		Σ_1^{11}	$\frac{1}{11}\Sigma_1^{11}$	$\frac{1}{11}\Sigma_1^2\Sigma_1^{11}$	B $\frac{1}{33}\Sigma_1^3\Sigma_1^{11}$	Σ_1^3	$\Sigma_1^3\Sigma_1^3$	A $\frac{1}{9}\Sigma_1^3\Sigma_1^3$			uv	v^2	u^2
Año 1892.....	151												
1893.....	67					280							
1894.....	62					281	817	91					
1895.....	152					256	870	97					
1896.....	42					333	777	86					
1897.....	139	913	83			188	751	83					
1898.....	7	842	77	244	81	230	584	65	—16	— 7	112	256	49
1899.....	84	925	84	246	82	166	642	71	—11	—13	143	121	169
1900.....	75	933	85	250	83	246	621	69	—14	—18	252	196	324
1901.....	87	896	81	254	85	209	669	74	—11	—27	297	121	729
1902.....	17	967	88	250	83	214	700	77	— 6	—28	168	36	784
1903.....	80	890	81	255	85	277	791	77	— 8	—22	176	64	484
1904.....	150	941	86	250	83	300	912	101	18	3	54	324	9
1905.....	70	908	83	251	84	335	933	104	20	23	460	400	529
1906.....	115	940	85	251	84	298	923	103	19	25	475	361	625
1907.....	113	917	83	249	83	290	821	91	8	38	304	64	1444
1908.....	62	896	81	244	82	233	694	77	— 5	11	— 55	25	121
1909.....	58	875	80	229	76	171	622	69	— 7	13	— 91	49	169
1910.....	51	752	68	214	71	218	611	68	— 3	9	— 27	9	81
1911.....	109	731	66	199	66	222	637	71	5	—26	—130	25	676
1912.....	62	718	65	197	66	197	566	63	— 3	—30	90	9	900
1913.....	26	730	66	200	67	147	456	51	—16	—31	496	256	961
1914.....	59	763	69	216	72	112	394	44	—28	—34	952	784	1156

1915.....	27	896	81	228	76	135	425	47	—29	—10	290	841	100
1916.....	49	862	78	239	80	178	589	65	—15	8	—120	225	64
1917.....	102	880	80	241	81	276	776	86	5	30	150	25	900
1918.....	125	916	83	247	82	322	1009	112	30	58	1740	900	3364
1919.....	95	924	84	253	84	411	1036	115	31	30	930	961	900
1920.....	191	944	86	266	85	303	1049	117	32	9	288	1024	81
1921.....	17	1061	96	297	99	335	880	98	— 1	13	13	1	169
1922.....	127	1154	105	306	102	242	836	93	— 9	—29	261	81	841
1923.....	98	1154	105	308	103	259	712	79	—24	—38	912	576	1444
1924.....	34	1074	98	302	101	211	727	81	—20	—38	760	400	1444
1925.....	79	1092	99			257	833	93					
1926.....	144					365	1010	112					
1927.....	142					388	1042	116					
1928.....	102					289	937	104					
1929.....	45					260							
1930.....	113										Σuv	Σv^2	Σu^2
Promedio.....	120	Precip. máx. 191 $<$ 2 $\times$ 120									8855	8134	18517

Coeficiente de correlación : $r = \dfrac{\Sigma uv}{\sqrt{\Sigma u^2 \, \Sigma v^2}} = \dfrac{8855}{\sqrt{18.517 \times 8134}} = 0{,}724.$

Error probable de r : $e = \dfrac{0{,}674\,(1 - r^2)}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}674\,(1 - 0{,}524)}{\sqrt{27}} = 0{,}062.$

Cuociente de probabilidad : $\dfrac{r}{e} = 11{,}7.$

Notación. — Escribiremos : Mendoza, Precipitación, 1898-194, D + E + F, $r = 0{,}724$, $e = 0{,}062$, $\dfrac{r}{e} = 11{,}7$.

Obsérvese que para la correlación se pierden los seis primeros y los seis últimos años. Sin embargo, cuando la curva-eje es muy regular, se pueden recuperar de uno a tres años en cada extremo.

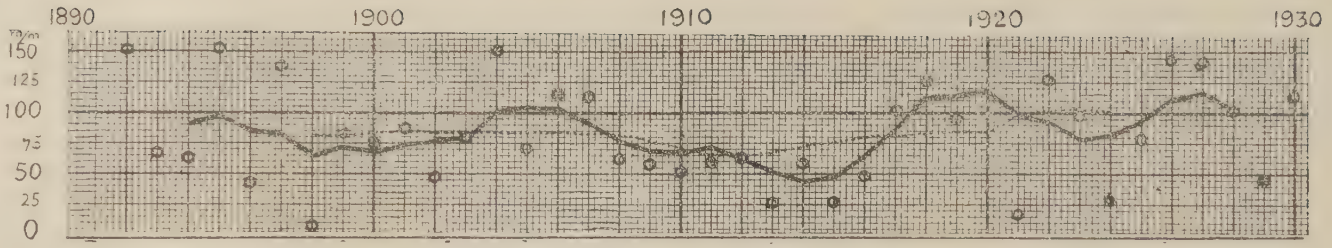


Fig. 3. ○ Observaciones directas; ..... Curva eje; ~~~ Curva apical
Precipitaciones de verano (D + E + F) en Mendoza

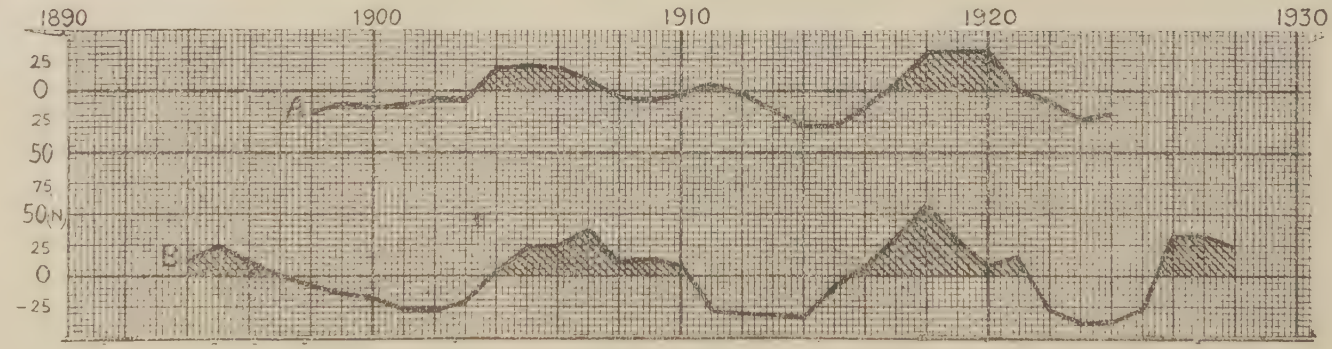


Fig. 4. — A. Desviaciones *v* de la curva apica ; B. Desviaciones *u* de las manchas solares
Precipitaciones de verano (D + E + F) en Mendoza

4. OBSERVACIONES

1ª Ocurren, a veces, precipitaciones sumamente fuertes que deformarían mucho la curva apical. Como estas precipitaciones extremas no son proporcionales al número de las manchas solares coexistentes, las reduciremos al duplo del promedio de las precipitaciones observadas.

2ª No es costumbre, al correlacionar los fenómenos meteorológicos, referir las desviaciones a una curva eje, como lo hemos hecho en nuestro trabajo, sino que se las calcula con respecto a un valor fijo que es el promedio aritmético de los datos de observación, o expresándonos en la terminología de la mecánica, en vez de la línea baricéntrica 1 a 11 (nuestra curva-eje), se calcula el centro de gravedad de todos los valores dados. Pero es evidente que, haciéndolo así, se cometerán grandes errores, hasta el extremo de que, en muchos casos, las desviaciones cambian de signo. Creemos que la omisión de este detalle ha sido la causa principal, porque en muchos trabajos anteriores se obtuvieron resultados insuficientes. Nos complacemos, por lo tanto, en indicar que el señor Alfredo Galmarini, del Instituto meteorológico nacional, también realizó ese paso importante de emplear un centro movible en vez de fijo. Cuando le comunicamos nuestros resultados, nos manifestó que había hecho estudios análogos empleando, en lugar de nuestra curva-eje, una línea recta que por medio del cálculo de los cuadrados mínimos ajustaba a los valores observados.

3ª Al correlacionar las curvas meteorológicas con las manchas solares, se observa muy a menudo lo siguiente : por ejemplo, durante tres períodos solares la curva tiene correlación positiva con las manchas solares; en el cuarto período correlación nula, y en el quinto correlación negativa. Debiéramos pues, para ser exactos, determinar tres coeficientes de correlación. Pero como es usual, siempre hemos caracterizado en este trabajo las curvas meteorológicas por un solo coeficiente, rechazando los casos como el indicado, pues para ellos no resultarían sino valores pequeños del coeficiente de correlación. La idea de una correlación más completa puede ser fecunda, pero aún no hemos tenido el tiempo para seguirla.

4ª Quizás se nos achaque, que en nuestro trabajo hemos correlacionado las manchas solares con las ordenadas promediadas de las curvas apicales y no con los datos meteorológicos directos. Contestaremos que los fenómenos meteorológicos son de un carácter tan ines-

table, que el dato aislado no es decisivo, sino que primero en reunión con los valores contiguos es capaz de enseñarnos el verdadero sentido del fenómeno estudiado. En todo caso, si hemos podido deducir en nuestro trabajo ciertas leyes generales, lo hemos podido tan sólo por el estudio de los valores promediados, mientras que para esto poco nos hubieran servido los valores de la observación directa. También resulta, que las leyes que se deducirán, no nos calificarán para hacer sobre la base de las manchas solares pronósticos meteorológicos para un año determinado, sino solamente para el grupo de años a que pertenece.

5ª No nos corresponde discutir en este estudio, si las variaciones del estado del sol, indicadas por el número variable de las manchas, ejercen un efecto térmico sobre la atmósfera terrestre, o si este efecto consiste en una mayor o menor emisión de electrones por el sol. Es sabido que ambas tesis tienen sus partidarios. Es probable que según el fenómeno meteorológico del cual se trate, predomine uno u otro de los dos efectos. Consideremos, por ejemplo, las precipitaciones de verano en Mendoza, las cuales, como hemos visto, tienen una correlación positiva con las manchas solares. Ahora bien, en ninguna parte de la república, si estamos bien informados, el cielo en verano es tan despejado como en Mendoza (obsérvese que Mendoza se encuentra en la faja de alta presión entre los paralelos 30° y 35° y que es de situación relativamente alta : 755 metros). Admitiendo que con el número de las manchas crece la actividad del sol y que aumenta, por lo tanto, también el número de electrones emitidos por el sol, este aumento de electrones se manifestará en la atmósfera transparente de Mendoza, y como los iones producidos sirven de núcleos de condensación para el vapor de agua, se deducirá que en Mendoza deben ser más lluviosas los años con numerosas manchas solares (1).

Sin embargo, para la mayoría de los fenómenos meteorológicos la

(1) La suposición de que la atmósfera de Mendoza es especialmente apta para repercutir el efecto electrónico de la radiación solar parece confirmarse por un fenómeno raro que en principios de marzo se observaba en las provincias andinas. Indicaremos que en este tiempo la república fué castigada por calores completamente excepcionales para la mencionada época del año. Observábanse, pues, en la cordillera de los Andes « misteriosas iluminaciones nocturnas », que el señor Martín Gil, director de la Oficina meteorológica nacional, explica por la acción de « descargas catódicas o electrónicas emitidas por el sol en momentos de sus grandes perturbaciones, atraídas o hechas sensibles, por enormes masas de hierro magnético que pudieran existir en esa región andina » (véase el artículo de Gil : *Cosas varas*, en *La Nación* del 13 de marzo).

explicación parece más fácil, si admitimos que el efecto indicado por las manchas solares, es térmico, por lo cual nos acogeremos en nuestro trabajo a esta última tesis.

5. REGLAS DE LA CORRELACIÓN SOLAR METEOROLÓGICA

Para encontrar los casos en que se pueda esperar obtener altos valores del coeficiente de la correlación solar meteorológica, nos hemos valido de las siguientes reglas.

a) Regla de la correlación solar barométrica

Se encontrarán altos valores de la correlación solar barométrica en aquellos lugares y aquella época del año en que predomina la calma barométrica. Ocurre calma barométrica : 1° en la zona ecuatorial; 2° en los centros respectivamente en las zonas de alta presión. La época más propicia es, por lo general, el invierno para las zonas de alta presión, y los meses en que el sol culmina en el cenit para la zona ecuatorial. La calma barométrica se disturba por la proximidad de corrientes marinas calientes o frías.

Explicación : Cuanto menos variable es la presión barométrica, tanto mejor la radiación puede imponerle su propio régimen.

b) Regla de la correlación solar pluviométrica

Se obtendrán altos valores de la correlación solar pluviométrica en aquellos lugares y aquella época del año en que existe una gran regularidad de las precipitaciones. Se producen precipitaciones uniformes cuando predominan vientos uniformes y fuertes, sobre todo cuando los vientos se dirijen perpendicularmente contra una costa bordeada de una cordillera de altas montañas, o también en las altas montañas aisladas.

Guiándonos por estas reglas, hemos estudiado los mapas isobáricos y de vientos predominantes trazados para verano e invierno, que se encuentran en cualquier buen texto de meteorología, y hemos escogido los lugares en que se puede esperar que se cumplan las condiciones establecidas.

CAPÍTULO II

La correlación solar barométrica

1. CONSIDERACIONES GENERALES

El estudio de la correlación solar barométrica ofrece grandes dificultades. Para apoyarlo en una base sólida, hemos creído necesario trazar las curvas barométricas apicales de mes a mes. Hemos encontrado las siguientes relaciones.

a) Uniformidad de la presión barométrica en vastos territorios

Si, por ejemplo, para un mismo mes trazamos las curvas barométricas apicales para Santiago de Chile, Córdoba, Buenos Aires, Goya, Curitiba y Río de Janeiro, veremos que la curva de Santiago de Chile,

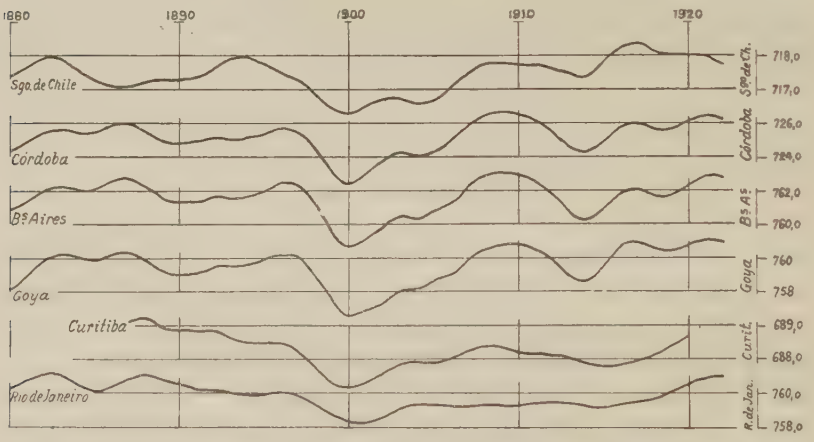


Fig. 5. — Curvas barométricas de Santiago de Chile, Córdoba, Buenos Aires, Goya, Curitiba y Río de Janeiro para el mes de julio. Todas son semejantes. Las curvas de Santiago y de Curitiva tienen escala duplificada.

a pesar de la alta barrera de los Andes, se asemeja mucho a la de Córdoba; que ésta, a su vez, es casi idéntica con las de Buenos Aires y Goya, las cuales, achatándose, se parecen a las de Curitiba (sur de Brasil) y Río de Janeiro (fig. 5). La misma semejanza se encontrará entre las curvas de Manila, Batavia, Colombo, Bangalore (sur de India) y Antananarivo (Madagascar), lugares todos pertenecientes al océano Índico y anexos, siendo casi idénticas las curvas de Bangalore a las

de Colombo. Igual semejanza existe para todas las partes del mundo. Hay, pues, uniformidad de la presión barométrica en la misma época para grandes territorios. Las correlaciones que deduciremos para determinados lugares, serán válidas, por lo tanto, para toda una región.

b) La presión barométrica para los meses sucesivos en el mismo lugar

Tracemos para el mismo lugar y los meses sucesivos las curvas barométricas apicales que designaremos con B_1, B_2, B_3, ... Se observará que, en general, estas curvas son muy distintas. Cuando por primera vez comprobábamos esta diferencia, quedamos completamente desconcertados; pues, entonces parece imposible encontrar correlaciones solar-barométricas convincentes. Sin embargo, hemos podido salvar en parte la dificultad señalada en los siguientes casos :

Primer caso : En los lugares marítimos, especialmente de latitud geográfica baja, se observa a menudo que las curvas barométricas de los meses sucesivos son muy parecidas. Así ocurre en las estaciones del Pacífico : en Isla de Malden (lat. 4°S, long. 115°W), donde las curvas son en alto grado semejantes; y en Apia (Samoa). Sobre todo son las curvas de los meses de primavera que más se asemejan, siendo entonces muy parecidas frecuentemente también en los casos en los que son diferentes para los demás meses. Veremos que, en la zona tropical, las altas correlaciones solarbarométricas corresponden a la primavera y al verano, o sea a la primera parte del año térmico; y que, de un modo análogo, en esta zona la correlación de las grandes precipitaciones con las manchas solares es mejor en la época en que aquéllas se inician. Las curvas barométricas suelen ser muy semejantes también en las estaciones de situación alta, especialmente si son marítimas, ejemplos : Antananarivo, 1400 metros sobre el nivel del mar; Santa Helena, observatorio a 600 metros de altura; Kodaikanal, sur de India, latitud 10°13′N, longitud 77°32′E, 2300 metros de altura. El caso más interesante lo hemos encontrado en Nuwara Eliya, que es una estación de situación alta y despejada en Ceylán (lat. 6°59′N, long. 80°46′E, 1860 metros de altura) y que puede considerarse como representante de las condiciones de la atmósfera libre. Es quizá la única estación que reune condiciones tan excepcionales, de la cual poseemos observaciones durante un período bastante largo. En la figura 6 que reproduce las curvas barométricas apicales, se observará que éstas son casi idénticas para todos los meses. Faltan pues, en la

atmósfera libre, las pulsaciones perturbadoras que hacen tan difícil el estudio de la correlación solar-barométrica y de las cuales nos ocuparemos más abajo.

Segundo caso : Se observa con frecuencia que B_1 es inversa a B_2, lo cual indicaremos por $B_1 \times B_2$. Lo mismo se encontrará que $B_2 \times B_3$,... Luego será $B_1 = B_3$, $B_2 = B_4$, ... Es decir, las curvas barométricas alternantes son iguales.

Tercer caso : Quizás más frecuentemente todavía se observa que una curva barométrica se asemeja a la tercera que le sigue : $B_1 = B_4$, $B_2 = B_5$, ...

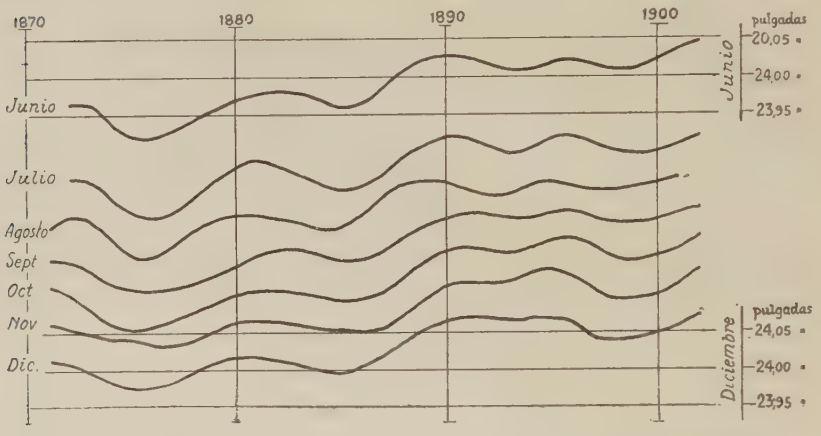


Fig. 6. — Nuwara Eliya, representante de la atmósfera libre. Presión atmosférica
Las curvas apicales mensuales tienen todas casi la misma forma

Hemos podido establecer las semejanzas que acabamos de señalar en los casos segundo y tercero, sobre todo en las estaciones del océano Índico (Colombo, Batavia) (fig. 7). Llama la atención que, para esta región, se ha encontrado también una pulsación de la presión atmosféricacon un período de tres a cuatro años, la cual es una de las pulsaciones mejor confirmadas entre las muchas ya estudiadas. Se supone producida por causas puramente terrestres, atribuyéndose para producirla un papel principal al intercambio térmico entre el continente y el océano. Las semejanzas arriba indicadas son características también para el litoral argentino, especialmente en la época fría, cuando se cierra sobre el continente sudamericano el cinturón de alta presión, que tiene por centros las partes de los océanos Pacífico y Atlántico a ambos lados de este continente, entre los paralelos 30° y 35°. En cambio, no hemos podido comprobar la semejanza de las curvas baro-

métricas, alternantes o separadas por dos meses, en el mar de las Antillas (Trinidad, Port au Prince, Habana); ni en Punta Arenas ni en Wellington (Nueva Zelandia).

Volviendo a estudiar las semejanzas referidas $B_1 = B_2$, $B_2 = B_4$, ... y $B_1 = B_4$, $B_2 = B_5$, debemos preguntar, cómo podemos explicarlas y qué valor tienen para el estudio de la correlación solar-barométrica. Sabemos, por un trabajo de A. Defant, que las precipitaciones que se

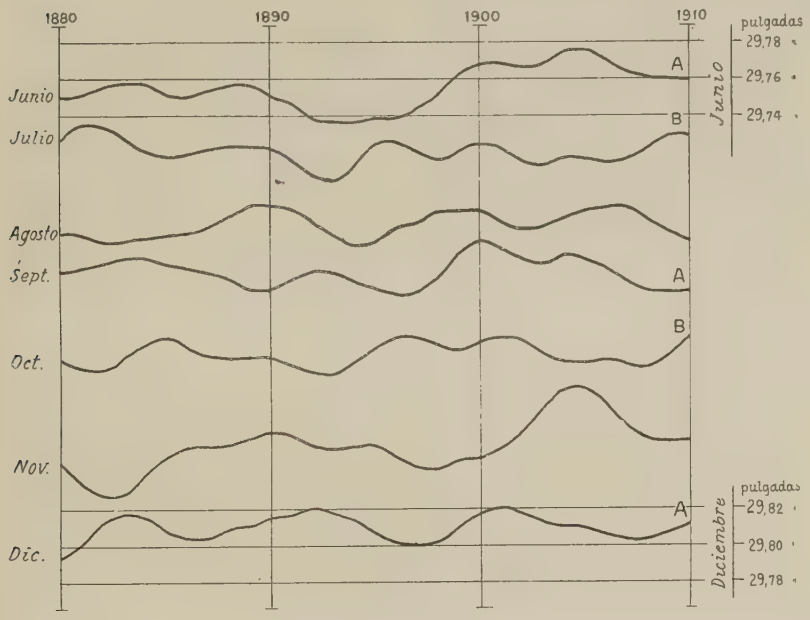


Fig. 7. — Colombo. Presión atmosférica. Curvas apicales mensuales. Las curvas inmediatamente sucesivas muchas veces son inversas. Las curvas separadas por dos meses, A, A, A; B, B, son semejantes.

producen en la faja de alta presión entre los paralelos 30° y 35°, pueden descomponerse en varias ondas, de las cuales la más importante tiene un período de 7,1 días. Clayton determinó, para la presión atmosférica, una onda también de 7 días de período, la que se origina en la zona polar, y disminuyendo de intensidad se dirije hacia el ecuador, donde desaparece. En Alaska, donde primero se la puede observar, tiene la amplitud (elongación máxima) de unos cuatro milímetros de mercurio.

Basándonos en estos resultados, supongamos que a la curva barométrica se sobreponga una onda de 7 días de período. El tiempo de 7 días está contenido casi 4,5 veces en el número de días de un mes.

Luego, si formamos el promedio mensual de la presión barométrica, media onda quedará sin compensar. Lo mismo quedará, para el mes siguiente, media onda sin compensar, pero de fase opuesta. Por consiguiente debe ser $B_1 \times B_2$, $B_2 \times B_3$, ..., en conformidad con el segundo caso arriba estudiado.

Además, por ser de fase opuesta, las dos semiondas que quedan sin compensar en el promedio de un mes, se destruirán en el promedio de dos meses sucesivos, es decir, en los promedios bimensuales ya no existe la perturbación de siete días de período. Luego será permitido efectuar la correlación solar-barométrica para dos meses sucesivos, cada vez que se verifiquen las condiciones del caso 2°.

Estudiemos ahora el caso 3°. La supuesta pulsación perturbadora de siete días está contenida exactamente trece veces en el tiempo de tres meses ($91 : 7 = 13$). Quedan cumplidas, por consiguiente, las condiciones de correlación para el caso 3°. Justifíquese, pues, la correlación solar-barométrica trimestral, que es la más importante por corresponder a la duración de las estaciones del año. Este resultado justifica también la correlación trimestral de las precipitaciones con las manchas solares, pues las precipitaciones dependen de las variaciones de la presión atmosférica. Es difícil realizar, para las precipitaciones, comprobaciones directas análogas a las que hemos indicado para la presión barométrica, puesto que las precipitaciones, excepto en los lugares donde son muy abundantes, suelen ser tan variables, que el tiempo de un mes es demasiado corto para proporcionar curvas pluviométricas comparables. Es necesario promediar las precipitaciones para intervalos más largos (tres meses).

Teniendo en cuenta lo expuesto, podemos reunir en los siguientes criterios las condiciones que deben cumplirse para poder efectuar correlaciones seguras entre la presión atmosférica y las manchas solares.

Primer criterio de compatibilidad. — La correlación solar-barométrica es permitida cuando las curvas de varios meses sucesivos tienen gran semejanza. En este caso podemos admitir que no existen pulsaciones de perturbación. Es el caso más seguro, y lo hemos verificado para Antananarivo y el litoral argentino en los meses de invierno, y para Manila, Batavia, y parcialmente para Colombo, en los meses de primavera.

Segundo criterio de compatibilidad. — La correlación solar-barométrica también es permitida, si se asemejan las curvas barométricas para los meses alternantes o para los meses separados por dos meses

intercalados. Hemos verificado estas condiciones para las estaciones del océano Índico (Batavia, Colombo).

Tercer criterio de compatibilidad. — Se puede ensayar la correlación solar-barométrica para un mes, si la curva barométrica se asemeja a la de las manchas solares. Sin embargo, el resultado tendrá poco valor si la curva se distingue mucho de las de los meses anterior y posterior. Este caso se realiza : para la Siberia central (Irkutsk, noviembre); para la depresión entre las Montañas Rocallosas de Norte América (Great Basin, Salt Lake City, noviembre), y en Groenlandia (Upernivik, mayo). Los meses indicados son las épocas de calma barométrica. En cuanto a la depresión entre las Montañas Rocallosas, añadiremos que es la parte de los Estados Unidos que no es azotada por el violento cambio de los vientos calientes del sur, procedentes del golfo de México, y de los vientos fríos y huracanados del norte (Northers).

Cuarto criterio de compatibilidad. — En todos los casos, sean como quieran las curvas barométricas mensuales sucesivas, se podrá ensayar la correlación de la suma de las presiones atmosféricas mensuales de tres meses seguidos; pues esta suma es bastante grande para poder despreciar el sobrante de la última de las pulsaciones de siete días que no quepa exactamente en el período de tres meses. Hemos aplicado este criterio en los casos de Wellington y Adelaide.

Observacion. — Dada la gran importancia que tiene la pulsación de siete días para todos los fenómenos meteorológicos (precipitación, presión atmosférica, temperatura), sería muy conveniente que los registros meteorológicos se llevasen por períodos de cuatro semanas, o sea 28 días, restaurándose así, en el uso científico, la usanza de los pueblos antiquísimos de medir el tiempo según las lunaciones, ya que no se puede esperar que la humanidad reforme su calendario de acuerdo con este período.

2. EJEMPLOS DE LA CORRELACIÓN SOLAR-BAROMÉTRICA

Para explicar el signo algebraico ($\pm$) de la correlación solar-barométrica, debemos recordar la idea básica de la teoría de la circulación general atmosférica. Se admite que la causa principal de la circulación atmosférica es la diferencia térmica entre la zonas ecuatorial y polares. Esta diferencia produce el desbordamiento del aire de las altas capas ecuatoriales en dirección hacia los polos; de donde resulta

la baja presión barométrica, que es característica de la zona ecuatorial. Por consiguiente, cuanto mayor es la radiación solar, mayor será el desbordamiento de aire y más baja, por lo tanto, la presión en esta zona. Ahora bien, según las mediciones bolométricas de C. G. Abbot, la radiación solar aumenta con el número de las manchas solares. Se deducirá, pues, que la presión atmosférica en la zona ecuatorial será más baja en los años de numerosas manchas solares y que, por consiguiente, para esta zona la correlación solar-barométrica debe ser negativa.

El resultado teórico que acabamos de establecer para la zona ecuatorial, queda perfectamente comprobado por los valores del coeficiente de correlación que hemos encontrado para Colombo, Batavia y Manila. Para cada uno de estos lugares, las curvas barométricas denotan altas correlaciones para los dos meses de primavera, cuando el sol culmina cerca del cenit. Esto pasa, si admitimos para la culminación solar cerca del cenit, como distancia cenital, hasta 10 grados: en Colombo (lat. 6°54′ N) en los meses de marzo y abril; en Batavia (lat. 6°11′ S) en septiembre y octubre, y en Manila (lat. 14°35′ N) en abril y mayo. Nuestros resultados son los siguientes:

Colombo (1875-1914):

$$\text{Mar.} + \text{Abr.}: r = -0{,}48, \qquad e = 0{,}083, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}8,$$

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.}: r = -0{,}59, \qquad e = 0{,}069, \qquad \frac{r}{e} = 8{,}5.$$

Batavia (1872-1917):

$$\text{Sept.} + \text{Oct.}: r = -0{,}61, \qquad e = 0{,}063, \qquad \frac{r}{e} = 9{,}6,$$

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.}: r = -0{,}49, \qquad e = 0{,}076, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}4.$$

Manila (1892-1917):

$$\text{Abr.} + \text{May.}: r = -0{,}55, \qquad e = 0{,}092, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}0.$$

Para la zona ecuatorial, hemos examinado también las curvas barométricas mensuales para el Golfo de México (Trinidad, Port au Prince y Habana) y las para Apia, pero con resultado negativo; lo cual, para el Golfo de México, puede explicarse por la anomalía térmica producida por la conocida corriente marina caliente.

Estudiemos ahora la correlación solar-barométrica para las zonas de alta presión. Allí nos interesan los meses de invierno, pues enton-

ces hay calma barométrica. En las partes continentales de estas zonas, por el enfriamiento del aire, quedarán también bajas en invierno las superficies isobáricas de la atmósfera en los años de alta radiación solar, mientras ellas suben con el aumento de la misma en la zona ecuatorial. De ahí resulta un flujo crecido de aire desde las capas altas ecuatoriales hacia las zonas frías continentales, y se obtendrán, por lo tanto, valores positivos del coeficiente de correlación para estas zonas. La observación suministra, al contrario, correlaciones negativas para las partes oceánicas de estas zonas. La explicación es más difícil que para las partes continentales. Adoptaremos aquella que encontramos en el último trabajo de H. H. Clayton, *The atmosphere and the Sun, Smithsonian Miscellaneous Collections,* volume LXXXII, number 7, Washington, 1930. Cuanto más intensa es la radiación solar, más fuertes serán los vientos. Sobre los continentes, a causa del frotamiento con la superficie terrestre, ellos experimentarán impedimento, se acumularán las masas de aire frío y subirá la columna barométrica. Por consiguiente, debe ser positiva sobre los continentes la correlación solar-barométrica, de acuerdo con nuestra explicación anterior. Al contrario, podemos despreciar el frotamiento de las corrientes de aire sobre los océanos, pues los vientos serán allí más fuertes en los años de muchas manchas. Pero, según una ley de la mecánica de los cuerpos líquidos y gaseosos, disminuye la presión de una corriente a medida que aumenta su velocidad. Luego la columna barométrica bajará, y, por lo tanto, debe ser negativa la correlación solar barométrica sobre los océanos.

Nuestros resultados son los siguientes :

1. *Estaciones continentales :*

Litoral argentino : Buenos Aires y Goya :

Buenos Aires (1883-1918) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}49, \qquad e = 0{,}085, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}8.$$

Goya (1883-1918) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}64, \qquad e = 0{,}066, \qquad \frac{r}{e} = 9{,}6.$$

Córdoba (Argentina) (1878-1918) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}38, \qquad e = 0{,}090, \qquad \frac{r}{e} = 4{,}2.$$

Irkutsk (1887-1919) : Noviembre (mes inicial del intenso frío, y, probablemente, de mayor calma barométrica) :

$$r = 0{,}60, \qquad e = 0{,}047, \qquad \frac{r}{e} = 12{,}8.$$

Irkutsk (1887-1919) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = 0{,}48, \qquad e = 0{,}090, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}3.$$

Salt Lake City (1881-1917) : Noviembre (mes de mayor presión y mayor calma barométrica) : $r = 0{,}24$.

2. *Estaciones oceánicas :*

Antananarivo (1895-1917) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = -0{,}71, \qquad e = 0{,}071, \qquad \frac{r}{e} = 10.$$

Adelaide (1864-1917) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = -0{,}60, \qquad e = 0{,}059, \qquad \frac{r}{e} = 10.$$

Wellington (1867-1919) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = -0{,}48, \qquad e = 0{,}071, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}8.$$

En los meses de verano la correlación solar-barométrica en Adelaide y Wellington tiene la tendencia de hacerse positiva. Encontramos :

Adelaide (1861-1919) :

$$\text{Nov.} + \text{Dic.} + \text{En.} : r = -0{,}39, \qquad e = 0{,}072, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}4.$$

Wellington (1871-1915) :

$$\text{Nov.} + \text{Dic.} + \text{En.} : r = +0{,}39, \qquad e = 0{,}085, \qquad \frac{r}{e} = 4{,}6.$$

Hemos trazado también las curvas barométricas mensuales para las estaciones de la costa occidental de Groenlandia, las cuales, por lo general, denotan correlaciones positivas. Encontramos :

Upernivik (1881-1914) : Mayo (mes de mayor presión y mayor calma barométrica) :

$$r = 0{,}53, \qquad e = 0{,}083, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}3.$$

3. *Amplitud de la curva solar-barométrica.* — Para evitar equivocaciones, diremos que comprendemos por amplitud, como es costumbre, la distancia (media) de las elongaciones máximas de la onda, de la línea media (curva-eje). La amplitud es, pues, igual a la mitad de la altura entera de la onda. Hemos encontrado los siguientes valores:

Colombo : amplitud = 0,12 mm. de mercurio.
Batavia : amplitud = 0,2 mm.
Antananarivo (en los meses de invierno) : amplitud = 0,3 mm.
Goya (en los meses de invierno) : amplitud = 0,8 mm.
Buenos Aires : la misma que en Goya.
Irkutsk (en los meses de invierno) : amplitud = 1 mm.
Wellington (en los meses de invierno) : amplitud = 3 mm.
Upernivik (mayo) amplitud = 2,5 mm.

4. *Amplitud de la pulsación barométrica de siete días.* — Para determinar la amplitud de la pulsación barométrica con el período de siete días, hemos comparado las curvas barométricas apicales mensuales y elegido aquellas partes donde dos curvas sucesivas forman ondas netamente inversas. Resultan entonces los siguientes valores para la amplitud de la pulsación barométrica de siete días :

Colombo : amplitud = 0,2 mm.
Goya (meses de invierno) : amplitud = 0,4 mm.

Si comparamos estos valores con los de la onda solar-barométrica arriba indicada, veremos que en Colombo (pulsación = 0,2 mm., onda solar = 0,12 mm.) la pulsación puede destruir completamente el efecto de la variación de la radiación solar, mientras que en Goya (pulsación = 0,4 mm., onda solar = 0,8 mm) ella desviaría a la onda solar-barométrica por la mitad de sus elongaciones.

5. *Marea atmosférica.* — Para dar a conocer, cuán complicada es la marcha de la presión atmosférica, recordaremos que en ella se introduce también una pulsación diaria que alcanza sus dos puntos más altos a las 10 horas de la mañana y de la tarde, y sus dos puntos más bajos a las 4 de la mañana y de la tarde. Sus puntos extremos distan, pues, 6 horas, por lo cual se la ha denominado también marea atmosférica. En la región tropical su amplitud es más o menos de 1 mm., es decir cinco veces más grande que la amplitud de la curva solar-barométrica o la de la pulsación de siete días. Sin embargo, por su gran regularidad la marea atmosférica apenas actúe como factor de

perturbación en los estudios de correlación. Agregaremos que al contrario de la curva solar-barométrica su amplitud decrece en dirección hacia los polos, importando a los 60° de latitud tan sólo 0,1 mm.

CAPÍTULO III

La correlación solar-pluviométrica

1. EL COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

Como ya dijimos, nos costó mucho trabajo orientarnos en el arduo problema de la correlación solar-barométrica. El estudio de la correlación solar-pluviométrica es más sencillo, pues las precipitaciones se originan en la atmósfera libre en alturas considerables sobre la superficie terrestre; y allí, según hemos visto, faltan las pulsaciones perturbadoras, de modo que las precipitaciones pueden expresar más fácilmente la influencia de las variaciones de la radiación solar.

Distinguiremos dos clases de lluvias, las ascensionales y las migratorias (1).

a) Lluvias ascensionales

Evitando la expresión precipitaciones ascensionales, para no incurrir en la falta de la *contradictio in adjecto,* llamaremos lluvias ascensionales aquellas que son producidas por el movimiento rápido ascensional de las masas de aire calentadas por el contacto con la superficie terrestre caliente, o por la absorción directa de la radiación solar. Son : en pequeña escala las lluvias fuertes y de corta duración que acompañan las tormentas de verano; y en grande escala, la mayoría de las precipitaciones de las regiones cálidas. Estas lluvias serán tanto más copiosas, cuanto más grande es la radiación solar; su coeficiente de correlación con las manchas solares será, por consiguiente, positivo.

Ejemplos. — Recordando las reservas que hemos formulado en capítulo primero, observación 5ª, consideraremos las lluvias de verano en Mendoza como ascensionales. Hemos encontrado :

(1) Ya habíamos entregado el manuscrito de nuestro trabajo a la imprenta, cuando conocimos que también el eminente geógrafo alemán A. Hettner divide las precipitaciones en dos grandes categorías que denomina precipitaciones térmicas (*Wärmeregen*) y precipitaciones depresionales (*Depressionsregen*), las cuales corresponden a nuestras lluvias ascensionales respectivamente migratorias. Véase A. Hettner, *Die Klimate der Erde (Los climas de la Tierra)*, Leipzig, 1930.

Mendoza (1898-1914) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = +0{,}724, \qquad e = 0{,}062, \qquad \frac{r}{e} = 11{,}7.$$

Quizás se nos objete que el intervalo (1898-1914) es corto para una correlación segura. Pero poseemos también los datos para los años 1866-1880, y encontramos para este período una concordancia perfecta entre la curva pluviométrica apical y la curva de las manchas solares. Sin embargo, para permitir el cálculo de correlación, este período es demasiado corto.

Suponemos que también el número de las tormentas estivales que se hubieren registrado en una región de calma barométrica (provincias andinas, Madagascar) habría de dar buenas correlaciones positivas; pero carecemos de datos para comprobar nuestra hipótesis.

(Continuará.)

BIBLIOGRAFÍA

Por C. C. D.

Launay, Louis de, *La technique industrielle*. Un tomo en 8° (16 × 25), 337 páginas con 69 figuras y numerosos cuadros en el texto. Encuadernación tela 91,50 francos en Buenos Aires. Librería Béranger, París, 1930.

Este libro contiene, en esencia, el curso dictado por el autor en la Escuela de Ciencias Políticas. Su objeto es poner a la vista los principios generales de la técnica industrial y de su aplicación a casos particulares; o sea también de trazar una especie de cuadro sintético, del que resulten en evidencia los principios en cuestión, así como sus tendencias. Este libro está, en suma, concebido para ser de utilidad a aquellas personas que, sin ser especialistas, deseen conocer lo que ocurre en la industria moderna; les suministra, en forma condensada, explicaciones que, sólo diluídas y dificultadas con fórmulas a menudo inaccesibles, se encuentran en otras obras.

Puede apreciarse el contenido del libro recorriendo la siguiente transcripción de la tabla de materias :

Primera parte : *Principios generales :* Misión del técnico. Intervención de la ciencia en la industria. Su necesidad supeditada a condiciones financieras. Evolución histórica de la técnica. Sus caracteres de generalidad y de solidaridad en el mundo moderno. El objeto práctico de la industria; grandes divisiones de ésta. La organización industrial del país. El estadismo y el individualismo. Los agrupamientos : trusts, emporios, carteles, sindicatos. Organización industrial y comercial de una fábrica. Elección del lugar. Planos de conjunto. Economías de materiales, de combustibles, mano de obra y transportes. Aparatos gráficos y de seguridad. Taylorismo y selección profesional. Defensa contra las huelgas, etc.

Parte segunda : *Inventario de los recursos naturales :* Las materias minerales; metalogenia. El papel de la vida organizada en las concentraciones químicas. Empleos. Centros de producción; yacimientos y reservas de los metales principales. Los metales preciosos y su papel especial. Los abonos minerales. Los combustibles minerales sólidos. Los petróleos. Las materias primas vegetales. Las fuerzas naturales.

Parte tercera : *Extracción y elaboración de los recursos naturales :* Noción de termodinámica. Destilación e hidrogenación de las hullas. Las máquinas motores y las máquinas herramientas. El vapor. La explosión. La electricidad. Las industrias extractoras; la explotación del aire. Las industrias químicas. Metalurgia de los metales principales. Las industrias de la química mineral. Empleo de materias vegetales. Industrias de la química orgánica. Utilización de los fermentos. Las industrias mecánicas.

Termina el libro un capítulo sobre las *Conclusiones* y un índice alfabético.

MARCOTTE, EDMUNDO. *L'art de batir une maison agréable et saine.* Un tomo, en 8° (16 × 25) ; 572 páginas con 274 figuras en el texto y numerosos cuadros. Precio en Buenos Aires por correo, 103,50 francos. Librería Béranger, París y Lieja, 1930.

El ingeniero, autor de ese trabajo, fué antiguo constructor de faros, de barrios obreros, etc., es técnico sanitario diplomado por el Estado, y laureado por el Instituto de Francia. También es jefe de la sección Ensayos de la Escuela Nacional francesa de Puentes y Calzadas. El libro que nos ocupa puede considerarse como fundamental en materia de higiene de las habitaciones, así como de instalaciones accesorias, en las ciudades y en el campo.

Alojar convenientemente, es decir, satisfaciendo a condiciones de higiene y de confort, a un mayor número de personas, constituye, sin duda, uno de los más interesantes problemas de nuestros tiempos. No se trata, aquí, de una cuestión propiamente de arquitectura, y por cierto que no es bajo ese punto de vista que el profesor Marcotte ha encarado la redacción de su libro ; se propone, en realidad, exponer la manera de resolver el referido problema o sea, construir una casa o un barrio obrero atendiendo a la comodidad, a la salubridad, a la higiene y baratura, en cuanto posible sea aunar todas esas condiciones. Es menester tener en cuenta para ello, numerosas cuestiones relativas a los terrenos, al aire, al agua, a la luz. Es lo que hace el autor Marcotte, sin olvidar las necesarias nociones de microbiología y de tomar en consideración la provisión del agua, la evacuación de las basuras, las cloacas, etc.

En suma se trata de un libro práctico y sencillo en el que el problema de la habitación, está expuesto en su conjunto y en sus detalles. Algunos capítulos tratan de la legislación, de los ensayos de materiales, de la lucha contra la tuberculosis, etc.

PASCAL, PAUL, *Explosifs. Poudres Gaz de Combat*, 2ème édition. Un tomo en 8° (16,5 × 25), II + 321 páginas. Precio 60 francos. Hermann y Cía. París, 1930.

Bien conocidos son los servicios que prestan los explosivos, tanto en tiempo de guerra como en el de paz. Agotada la primera edición de la obra

que nos ocupa en los años posteriores a la Gran guerra, se publica ahora una nueva edición en la que se busca satisfacer la doble curiosidad : del uso de los explosivos, y del conocimiento de la naturaleza de la reacción explosiva, completando la descripción detallada de las fabricaciones con el estudio físico-químico de las reacciones, y el examen de las propiedades balísticas de los productos elaborados. Esta nueva edición completa así la anterior que, en suma, era la exposición de las conferencias dadas por el autor en la Facultad de Ciencias de Lille, trayendo una serie de desarrollos relativos a la protección contra los gases y al fenómeno del choque en los motores de explosión.

El libro, además de un prefacio y de una introducción, consta de cuatro partes. La primera trata de la reacción explosiva : su cinética, su estado experimental y el empleo de los explosivos. La segunda se refiere a la fabricación de los explosivos : los nitratos orgánicos, los derivados nitratados : los explosivos líquidos. La tercera trata de las mezclas explosivas y de las pólvoras propulsoras : pólvora negra, explosivos de seguridad y cloratados, fabricación de las dinamitas; pólvoras sin humo o coloidales; fabricación de cebas. La parte cuarta expone lo relativo a gases de combate : sofocantes y tóxicos, lacrimógenos, tóxicos y vesicantes, esternutatorios derivados del arsénico y medios de defensa. Un complemento trata de las substancias antidetonantes.

Ricaud, L. J. M., Marget, Edm., Routin, J. L. *Applications de l'Électricité à la Marine*. Un tomo en 8°, 320 páginas (15,5 × 23) con 126 figuras. Precio 60 francos. Librería J. B. Ballière e hijos, París, 1930.

Pertenece a la Enciclopedia de Electricidad Industrial publicada bajo la dirección de A. Blondel con el patrocinio de varias sociedades. Los autores Ricaud y Marget son ingenieros de la marina; en cuanto al maestro de conferencias de la Escuela Superior de Electricidad, J. L. Routin, ha completado la parte relativa a Aparatos de Telecomando y Teleapunte.

Parece que no existía publicado en Francia nada relativo a las aplicaciones de la electricidad en los servicios mecánicos de comando de todas las máquinas de abordo ; el apunte de los cañones y la propulsión de los grandes navíos. Para salvar esa falta se habría publicado el libro que nos ocupa el cual suministra numerosas informaciones técnicas sobre el particular.

Consta la obra de cuatro partes que se ocupan sucesivamente de los *Servicios eléctricos a bordo. Generación y distribución de la electricidad. Condiciones particulares de las instalaciones de abordo. La propulsión eléctrica. Aparatos y disposiciones utilizados para realizar el teleapunte y el telecomando.*

Los capítulos se titulan : Alumbrado. Consideraciones generales sobre los comandos a distancia. Transmisiones, telecomando, comando por teleindicaciones. Transmisiones de órdenes y aparatos de comunicaciones. Proyectores. Motores y aplicaciones diversas. Tornos. Comando eléctrico de la

barra del timón. Aplicaciones de la electricidad al servicio de la artillería. — Historia somera de la generación y distribución de la electricidad : naturaleza de la corriente. Sistema de distribución. Tensión. Condiciones especiales impuestas a los generadores de bordo. Tipos diversos de grupos electrógenos de bordo. Organización general eléctrica del navío y de la red. Canalizaciones. Aparejado. — Generalidades sobre la propulsión eléctrica a corriente contínua o alternada común o con motor asincrónico. Estudio detallado de la instalación del *New Mexico*. Las ventajas e inconvenientes de la propulsión eléctrica con motores asincrónicos en corriente continua. Propulsión eléctrica en corriente alternada. Empleo del motor sincrónico. Definición del telepunteado y del telecomando. Telecomando. Teleapunte.

Rousset, J. *Guide du technicien pour l'organisation du travail personnel.* Un tomo en 8° (15 × 24), 192 páginas, 94 figuras en el texto. Librería Ch. Béranger, 1930.

El objeto de este libro es indicar a los ingenieros, sabios, administradores, profesores, caseros, publicistas, autores, conferencistas, etc., cómo pueden crear y aprovechar su documentación.

El primer capítulo trata de la documentación : su necesidad y guías generales para organizarla. Luego indica cómo deben recogerse los documentos, dónde hallarlos. Viajes de estudios. Útiles especiales de trabajo. Cómo clasificar los documentos, organizar una biblioteca, escribir un artículo para revistas técnicas, organizar los servicios de investigaciones y publicar un trabajo.

Un índice alfabético muy completo facilita la búsqueda de los numerosos, interesantes y útiles datos e informaciones contenidos en el libro.

Rousset, H. J. *Travail du cuir.* Un tomo (14 × 22,5), en 8°, 173 páginas con 170 figuras. Librería Ch. Béranger, París, 1930.

El autor manifiesta que no existiendo escrito en lengua francesa, libros sobre el trabajo del cuero en general, ha creído de utilidad escribir uno en ese idioma, en donde los profesionales de dicha industria hayan de encontrar informaciones útiles sobre la preparación de las pieles, caracteres de los cueros comerciales, composición y método de empleo de las numerosas substancias que sirven para preparar el cuero. Los aficionados sacarán con más razón aún, información y documentación provechosas. Los capítulos tratan sucesivamente de los siguientes puntos : Pieles y cueros. Preparación de los cueros. Trabajo mecánico. Enduidos para cueros. Cordonería, guarnicionería y sillería. Correas de transmisión. Maroquinería y encuadernación. Cueros artísticos.

ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS

FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES

INFORMACIONES GENERALES Y BIBLIOGRAFÍA (*)

(Continuación)

XVII

Premio municipal «Eduardo L. Holmberg»

En su sesión del 28 de abril de 1928, se resolvió, de acuerdo con el artículo 4° de la reglamentación (1) aprobada, integrar la sección «Ciencias Naturales» que debe actuar como jurado, a los efectos de aconsejar a la Academia la adjudicación del Premio municipal «Eduardo L. Holmberg», con el vicepresidente doctor Enrique Herrero Ducloux, por formar ya parte de la sección el señor presidente doctor Ángel Gallardo. En esa misma sesión el señor presidente de la sección «Ciencias Naturales» consultó a la Academia respecto de si ella consideraba deberse tomar en consideración, para adjudicar el premio esta primera vez, solamente los trabajos publicados en el año 1927, o si también convenía tenerse en cuenta los del año 1926. Observó que, tratándose de la primera adjudicación, el texto de la ordenanza podría resultar ambiguo. La Academia resolvió que se tomasen en cuenta los trabajos de ambos años, a fin de actuar sobre una mayor base y compensar las deficiencias inherentes a esa primera adjudicación en lo relativo a anuncios, avisos, etc. Consultada también la Academia sobre si pueden tomarse en consideración trabajos publicados en otra ciudad, cuando los autores residen en Buenos Aires, o cuando, viceversa, los autores hayan publicado sus trabajos en la Capital federal siendo así que residen en otra localidad, resolvió que, dados los términos de la ordenanza creando el premio y el espíritu de la misma, estos trabajos no deben tomarse en consideración.

Por su parte la Intendencia municipal, en una nota remitida el 19 de

(*) Véase *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo CVIII, página 556 y tomo CIV, página 108.

(1) Véase *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, tomo CV, página 116.

septiembre de 1928, manifestó no tener observación alguna que formular a la reglamentación (1).

Reunido el jurado para hacer la primera adjudicación, produjo el siguiente dictamen, que fué aprobado por la Academia en su sesión del 23 de junio de 1928 :

Buenos Aires, junio 9 de 1928.

Reunidos en la fecha los miembros del jurado del Premio « Eduardo L. Holmberg », de acuerdo con la reglamentación de la ordenanza respectiva, se procedió a examinar los dictámenes parciales formulados en las reuniones anteriores dedicadas a estudiar los trabajos de Ciencias Naturales publicados en los años 1926 y 1927, cuya nómina se adjunta.

De los que están dentro de las condiciones requeridas, el jurado, por unanimidad de los miembros presentes, resolvió aconsejar a la Academia que el citado premio sea discernido al trabajo titulado *Contribuciones a la Paleontología Argentina,* del que es autor el señor Lucas Kraglievich.

Ángel Gallardo. — Martín Doello-Jurado. — Enrique Herrero Ducloux. — Franco Pastore. — Pedro T. Vignau. — E. Hermitte.

El premio fué entregado al señor Kraglievich en la sesión pública de la Academia tenida el 20 de octubre de 1928, cuyos detalles se darán más adelante en la sección correspondiente de estos *Anales.*

La adjudicación del premio relativo al año 1928 fué hecha a favor del doctor José Yepes, de acuerdo con el siguiente dictamen del jurado, aprobado por la Academia en su sesión del 15 de junio de 1929 :

Buenos Aires, mayo 29 de 1929.

Honorable Academia :

Vuestra sección « Ciencias Naturales », reunida en jurado del Premio « Eduardo L. Holmberg », de acuerdo con la respectiva reglamentación, ha procedido a examinar los trabajos publicados en 1928 que estaban en condiciones de optar a dicho premio.

Después de haber reunido una lista, tan completa como ha sido posible, de lo publicado, y de haber solicitado de todos los señores académicos comunicasen los trabajos que conociesen, ha analizado los principales y, por unanimidad de los miembros que subscriben la presente, ha llegado a la conclusión de que el premio le corresponde al trabajo titulado *Los « Edentata » argentinos : Sistemática y distribución,* de que es autor don José Yepes.

Esta monografía consta de 55 páginas de texto y seis grandes láminas, con varias figuras cada una — fotografías o dibujos —, todas originales. Ha servido a su autor como trabajo final para optar al título de Doctor en Ciencias Naturales en la Universidad Nacional de Buenos Aires, y por decisión de la respectiva

(1) Véase tomo I, página 35.

Facultad ha sido publicado, en vista de su mérito, por la revista de la misma Universidad.

Representa un valioso trabajo de conjunto en que se estudian taxonómicamente todos los subórdenes, familias, géneros, especies y subespecies argentinas de un grupo de mamíferos tan típico e interesante, del punto de vista zoológico y paleontológico, como es el de los Edentados Xenartros, a sea los exclusivamente americanos. Tomando como base las colecciones del Museo Nacional de Historia Natural de Buenos Aires, el autor ha hecho una revisión prolija de todas las formas conocidas dentro del territorio nacional, aclarando muchos puntos de su sinonimia, estableciendo la localidad típica de cada una, sus características morfológicas en base principalmente del ex esqueleto y luego su distribución geográfica.

La suma de trabajo serio y continuado, la dedicación empeñosa y la competencia que este estudio revela, lo hacen acreedor, a juicio de esta comisión, a la recompensa que se va a discernir; máxime cuando ésta no es sólo de reconocimiento al mérito y al esfuerzo, sino también de estímulo a los estudiosos jóvenes de la Capital Federal, circunstancia que debe ser tenida en cuenta en este caso, como ya lo indica el hecho de tratarse de una tesis. Al adjudicársele, pues, al doctor José Yepes el premio creado por la Municipalidad de Buenos Aires para el mejor trabajo anual de Ciencias Naturales, la Academia entendería, por lo tanto, no solamente recompensar el meritorio esfuerzo realizado, sino alentar la esperanza fundada de que ello le ha de incitar a intensificar el estudio de tan importante grupo zoológico bajo sus restantes aspectos, anatómicos o biológicos, estudio del cual la presente monografía constituiría la primera parte, como el autor parece reconocerlo implícitamente en el subtítulo de la misma.

Ángel Gallardo. — Martín Doello-Jurado. — Franco Pastore. — Enrique M. Hermitte. — E. Herrero Ducloux. — Pedro T. Vignau.

En cuanto a la adjudicación del premio relativo al año 1929, lo fué a favor del doctor Pablo Groeber, por su trabajo titulado *Líneas fundamentales de la geología del Neuquén*. El dictamen del jurado está redactado en el mismo tenor que el producido con motivo de la adjudicación del premio 1926-1927. El jurado estaba formado por los mismos académicos que los anteriores, menos el doctor Herrero que se hallaba ausente, y el informe trae además la firma del doctor Alfredo Sordelli. Fué aprobado por la Academia en su sesión del 9 de julio de 1930.

Estos dos últimos premios serán entregados próximamente en acto público.

LES ANGLES ET LES ROTATIONS « IMAGINAIRES »

TROISIÈME CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE VECTORIELLE (1)

(Conclusion)

PAR C. C. DASSEN
Docteur ès sciences

153. Ces sections par des plans $X = X_0$ parallèles à l'OYZ quand $X_0 > r$ offrent donc le particularité, étant de quatrième degré, d'avoir deux branches qui ont pour asymptotes les intersections de leur plan avec ceux à 45° représentatifs des isotropes; mais, du moins quand $X_0 \leqslant r$, les courbes en question coupent leur asymptotes à l'origine sur l'axe des X; il faut donc qu'elles aient une tangente *t* intermédiaire, en un point T au fini, qui soit parallèle à l'asymptote en question (fig. 48). Pour trouver les quatre points symétriques où cela aura lieu, il nous faut établir la condition $\frac{dY}{dZ} = \pm 1$, puisque telles sont les valeurs qui correspondent aux inclinaisons des asymptotes en question.

Si l'équation (31) est résolue par rapport à Z en y faisant $X = X_0$ en obtient sans difficulté

$$Z = \pm Y \sqrt{\frac{X_0^2 + Y^2 - r^2}{X_0^2 + Y^2}}. \qquad (38)$$

D'un autre côté, si en (36), on établit la condition, $\frac{dY}{dZ} = \pm 1$ on obtient

$$(\pm Z)\, Y\, (Y^2 + r^2) = Y^4 + X_0^2 Z^2$$

qui, résolue par rapport à Z, donne après quelques transformations faciles

(1) Voir *Annales*, tome CVI, page 359, tome CVIII, pages 353 et 447, et tome CXI, page 161.

$$Z = \pm Y \frac{Y^2 + X_0^2 \pm (Y^2 - X_0^2)}{2X_0^2}$$

qui donne, ou bien $Z = \pm Y$; ou bien $Z = \pm Y \frac{Y^2}{X_0^2}$.

La première solution correspond aux points à l'infini. L'autre, introduite dans (38) afin d'éliminer Z, nous conduit à l'équation

$$\frac{Y^4}{X_0^4} = \frac{X_0^2 + Y^2 - r^2}{X_0^2 + Y^2}. \tag{39}$$

Pour $X_0 = r$ nous avons une résolution inmédiate qui conduit, ou bien à $Y = 0$ — ce qui correspond au point double, section du plan $X = X_0$ avec l'axe des X qui, comme nous l'avons vu, est une droite double de la surface — ou bien à $Y^4 + Y^2 r^2 - r^4 = 0$ dont la solution est

$$Y = \pm r \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \sim 0.79r.$$

154. En général, pour résoudre (39) on aura

$$Y^6 + X_0^2 Y^4 - X_0^4 Y^2 - X_0^4 (X_0^2 - r^2) = 0 \tag{40}$$

posant

$$Y^2 = U - \frac{X_0^2}{3} \tag{41}$$

on a

$$U^3 - \frac{4}{3} X_0^4 U - X_0^4 \frac{16X_0^2 - 27r^2}{27} = 0. \tag{42}$$

La valeur de X_0 qui correspond au discriminant nul de cette dernière équation est celui qui remplit la condition bien connue (faisant, pour abréger, $r = 1$)

$$-\left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{X_0^{12}}{27} + \frac{X_0^8}{4} \frac{(16X_0^2 - 27)^2}{27} = 0 \quad \text{soit} \quad 27 - 32X_0^2 = 0. \tag{43}$$

On obtient donc

$$X_0 = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} = \sim 0.9187.$$

Les valeurs de U correspondantes sont

$$-\frac{9}{8}, \quad \frac{9}{16}, \quad \frac{9}{16}.$$

On obtient ainsi

$$Y = \pm\sqrt{\frac{9}{16} - \frac{9}{32}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{8} = \sim 0.53.$$

Si $X_0 < \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$, le discriminant en question devient positif; l'équation (42) n'a qu'une racine réelle et négative puisque le dernier terme de (40) est alors positif. Donc, l'équation (41) et conséquemment la (40) n'ont pas de racines. On en déduit que les sections $X = X_0$ parallèles au plan des ZOY depuis $X_0 = 0$ jusqu'à $X_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$ n'offrent d'autres tangentes à 45° que les asymptotes. Ensuite le discriminant de (43) devenant négatif, nous aurons trois solutions réelles de (42).

Or, pour X_0 égal ou supérieure à r, le dernier terme de (40) est négatif; nous avons donc, une solution en Y^2 de cette équation qui est réelle et fournit une valeur réelle de $\pm$ Y; et par la nature de la courbe nous savons qu'il ne peut y en avoir une autre.

Maintenant, pour X_0 compris entre $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}$, et r, le dernier terme de (40) est positif, de sorte qu'une des trois racines réelles de Y^2 est négative et ne convient pas à Y, mais comme le second terme de (40) est positif et le troisième négatif, il faut bien qu'une au moins des deux autres racines en Y^2 de (41) soit positive. et par la nature de la courbe il ne peut y en avoir qu'une seule.

155. Nous avons calculé quelques valeurs de Y et de Z pour trois valeurs numériques de X_0 savoir, $\frac{1}{2}$, 1 et 2, en prenant le rayon comme unité. Voici les résultats :

$X = \frac{1}{2}$

Z	Y
0	0,81
$\frac{1}{2}$	1,023
1	1,37
2	2,22

$X = 1$

Z	Y
0	0
0,1	0,32
0,5	0,8
1	1,27
2	2,2
3	3,15

$X = 2$

Y	Z	Y	Z	Y	Z
0	0	0,8	0,7088	1,8	1,67
0,1	0,087	1	0,894	1,85	1,72
0,25	0,217	1,11	1,00	1,90	1,721
0,3	0,261	1,20	1,084	1,93	1,8
0,4	0,348	1,35	1,229	1,95	1,82
0,5	0,434	1,50	1,375	2,00	1,87
0,57	0,500	1,6	1,473	2,13	2,00
0,6	0,527	1,7	1,5725	2,20	2,072
				2,30	2,182
				3,00	2,88
				3,12	3,00
				4,10	4,00
				5,085	5,00

Toutes ces coordonnées, X, Y, Z, doivent être prises avec le double signe, positif et négatif, combinés de toutes les manières possibles. Nous avons tracé (figs. 47, 48 et 49) les courbes correspondantes. Dans

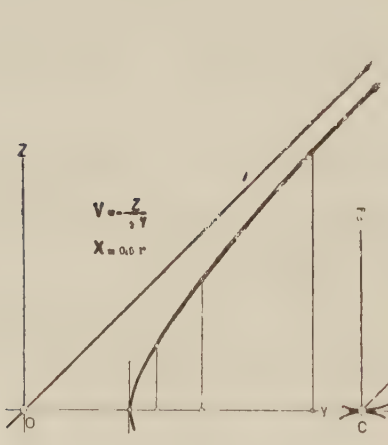


Figure 47

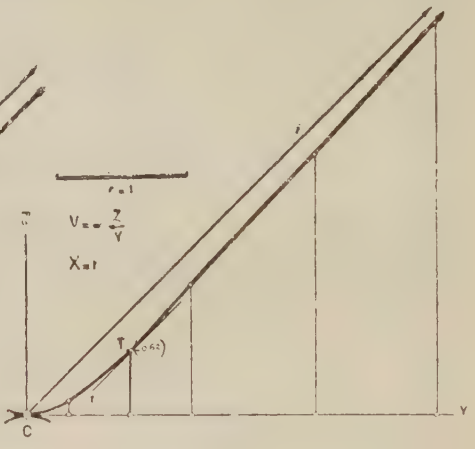


Figure 48

la première, comme la valeur de X_0, soit $\frac{1}{2}$, est moindre que $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ (voir n° 154), la courbe n'a pas de tangente (au fini) parallèle a l'asymptote qui est à 45°. La tangente au sommet, est parallèle à l'axe des Z. La seconde, qui correspond à la valeur très particulière $X_0 = r$, est la première où les branches des courbes se croisent sur l'axe des X;

et ici, les tangentes à ce point de croisement se confondent et sont parallèles à l'axe des Y. Nous avons à présent un point au fini où la tangente est parallèle à l'asymptote. Les coordonnées du point de contact, T, de cette tangente, calculées comme il a été indiqué au numero 153 donnent $Y = 0.79$, $Z = 0.488$.

La section par le plan $X = 2$ (fig. 49) a ses tangentes au point de

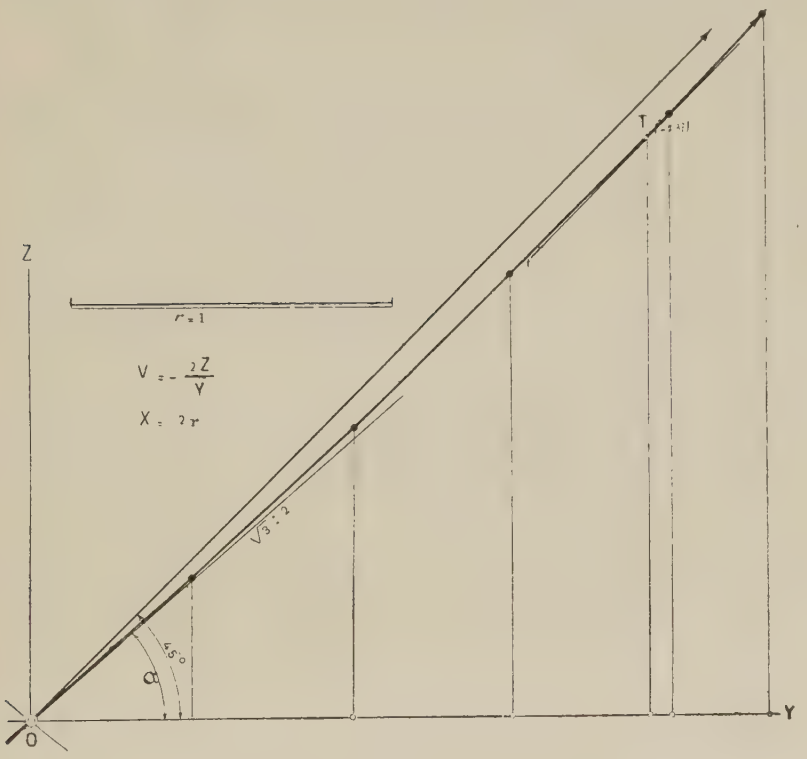


Figure 49

croisement des branches sur l'axe des X, inclinées suivant la formule trouvé au numero 152 d'un angle α tel que cotang $\alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Quant au point T où la tangente t est parallèle à l'asymptote i à 45°, l'équation (40) donne comme valeur de l'abscisse du point de contact, $Y = \sim 1.93$, auquel correspond l'ordonnée $Z = 1.80$.

156. On pourrait étudier, de même, les courbes que donnent les plans parallèles à celui des ZOX; elles ont deux branches ayant pour asymptotes les intersections de leur plan avec les bissecteurs i. Ces deux branches symétriques par rapport au point d'intersection du

plan sécant avec l'axe des Y, se couperont en angle droite, sur cet axe, pour $|Y_0| = r$, elles seront separées aux cas contraire, ayant alors leurs sommets au plan de base pour $|Y_0|$ moindre que r, au point d'intersection du plan sécant avec la circonférence section de la surface par le plan de base. Pour $|Y_0| > r$ les sommets appartiennent au plan des ZOY, sur l'hyperbole de la surface située dans ce plan. L'étude de ces sections nous semble superflue après celle déjà faite; elle n'offre du reste aucune difficulté.

157. La figure 50 est une représentation de la surface par la méthode de Monge. On a indiqué quelques coupes avec des plans q_2 parallèles au plan icnographique (celles représentées isolément par les figs. 45 et 46); on y voit aussi la coupe, c_1, c_2, de la surface avec le plan parallèle à celui des YZ à la distance r. Finalement, la coupe avec un plan passant par l'axe des Z et donc la trace est la droite $Y = mX$, est représentée, rabattue autour de cette trace, c'est l'hyperbole (h) qui a pour asymptote rabattue, la droite (i) qui est, dans l'espace, l'intersection du plan de la coupe avec un des t. Le contour apparent orthographique est l'hyperbole e_1, e_2 section de la surface par le plan des YZ. La circonférence du plan de base est d_1, d_2. D est le sommet de l'hyperbole h, dont l'axe non transverse rabattu est O_1E; (P_1, P_2) est un point quelconque de la surface. Quant à la cote V d'un point, nous savons que sa valeur est $-\frac{XZ}{Y}$; c'est, en somme, la quatrième proportionelle entre les trois autres coordonnés dans l'ordre Y, X, Z qui sont graphiquement exprimées dans l'épure. La construction de cette quatrième proportionelle est indiquée sur la figure pour le point P; le triangle $O_1C_1P_1$ a le côté $O_1C_1 = X$, le coté $CP_1 = Y$. Donc si l'on prend $O_1N = JP_2 = Z$, la parallèle MN à O_1C_1 donne le segment $\overline{MN}$ qui a la valeur V. Quand au signe, il sera négatif si X, Y, Z sont positifs, ou si deux seulement son négatifs; elle sera positive dans les autres cas.

La figure 51 donne une idée de la surface en question. C'est une perspective parallèle. On y a représenté les coupes par les plans $Z = \frac{r}{2}$ et $Z = r$; ainsi que les coupes par les plans passant par l'axe de Z et separés 15 en 15 degrés.

158. *Deuxième cas : r et x sont à deux unités capitales.* — Supposons d'abord que r est de nature « imaginaire pure », c'est-à-dire, que le premier nombre du diplet est nul : $r = (0, b) = -bi$. Un developpe-

ment analogue à celui qui a été fait pour le cas antérieurement traité (n° 142 et suivants) nous conduit à établir les égalités :

$$(\mathrm{Y} + \mathrm{V}i)^2 = -b^2 - (\mathrm{X} + \mathrm{Z}i)^2$$

$$\therefore \quad \mathrm{Y}^2 - \mathrm{V}^2 = -b^2 - \mathrm{X}^2 + \mathrm{Z}^2 \qquad (a) \qquad (44)$$

$$\mathrm{YV} = -\mathrm{XZ} \qquad (b)$$

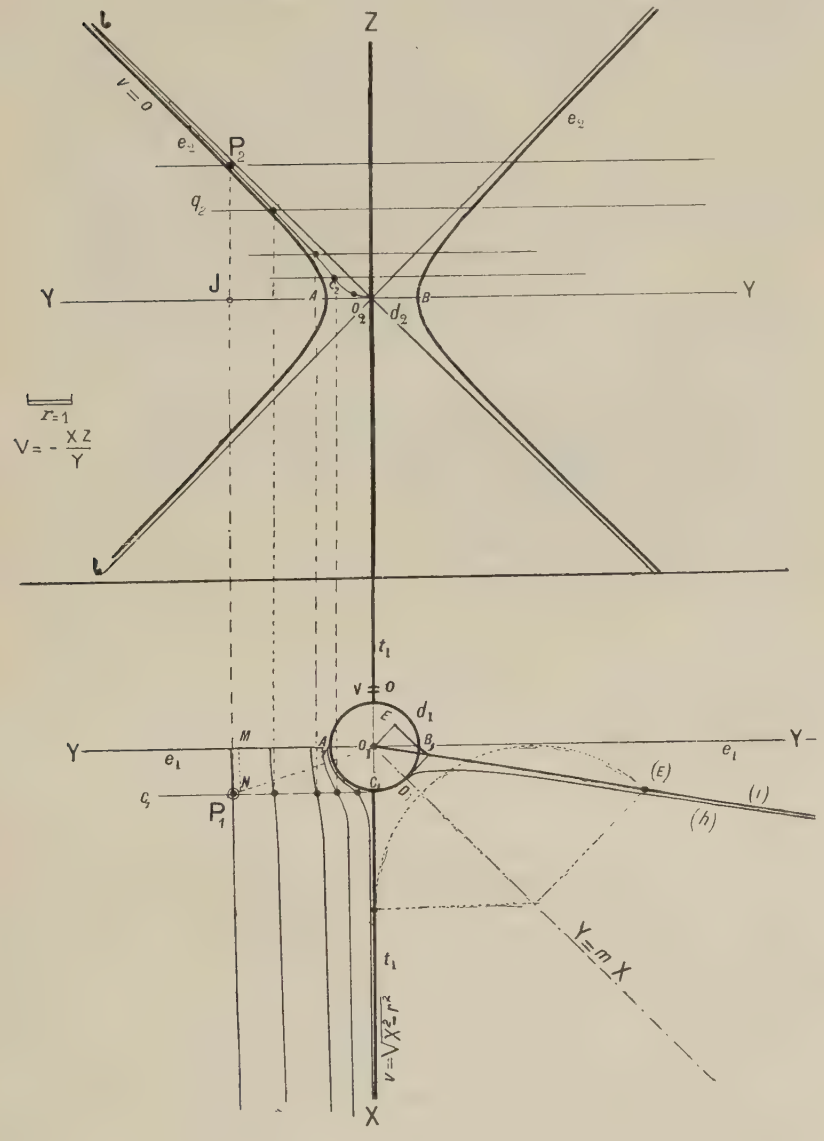


Figure 50

Les points de cote cero sont ceux d'intersection de l'hyperboloide de revolution à deux nappes

$$Z^2 - X^2 - Y^2 = b^2$$

(dont l'axe de revolution est celui des Z, son centre étant l'origine O de coordonnées et son demi axe réel ayant la valeur b), avec les plans: $XZ = 0$; c'est-à-dire, avec celui de base et celui des YZ. Mais le plan

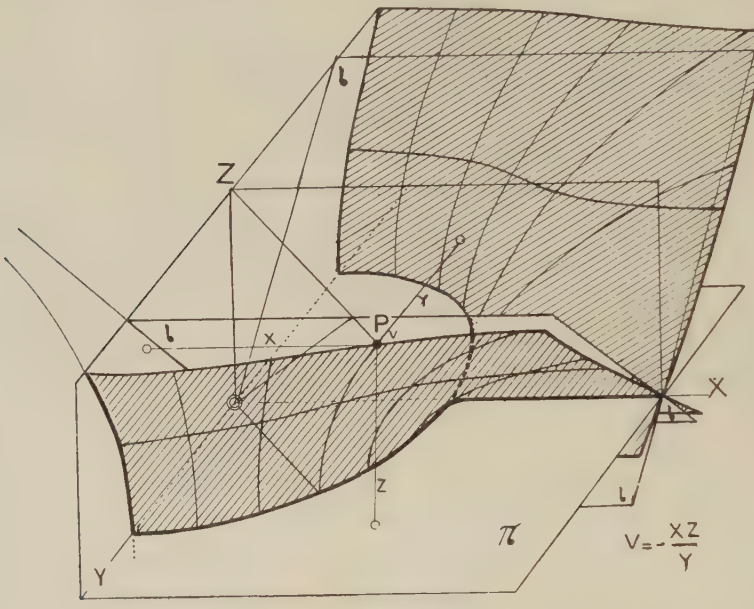


Figure 51

de base ne coupe pas cet hyperboloide, et l'autre $X = 0$ donne l'hyperbole equilatère

$$Z^2 - Y^2 = b^2. \qquad (45)$$

Cette hyperbole est, donc, l'unique ligne de cote nulle.

Notre représentation graphique sera constitué par la surface

$$X^2 + Y^2 - Z^2 + b^2 - \frac{X^2 Z^2}{Y^2} = 0, \qquad (46)$$

chaque point de coordonnées (X, Y, Z) ayant pour cote $V = -\frac{XZ}{Y}$. C'est exactement l'équation (31) en y changeant r^2 par $(-b^2)$.

La surface est symétrique par rapport aux plans, aux axes et au centre des coordonnées. Voyons les coupes avec les plans principaux.

159. Le plan de base, $Z = 0$, tenant compte de la condition (b) de (44) conduit, d'après le raisonnement fait au numéro 143, à établir que l'axe des X appartient, tout entier, au lieu (44), et même qu'il y figure comme droite double; chaque point de cet axe ayant une cote telle que

$$V^2 = X^2 + b^2. \tag{47}$$

160. Le plan $X = 0$ nous donne l'hyperbole (45) de cote nulle et axe transverse b; et le segment (double) de l'axe des Z compris entre $(+ b)$ et $(- b)$ coté d'après la formule

$$Z^2 + V^2 = b^2. \tag{48}$$

161. Quant au plan $Y = 0$, il donne ce même segment double, coté, de l'axe de Z; ainsi que l'axe des X, coté suivant (47), et double comme nous avons vu plus haut.

162. Si dans (35) on change r^2 par $(- b^2)$ on obtient l'équation d'une hyperbole qui à son centre en O, son axe transverse de valeurs $2bm : \sqrt{1 + m^2}$ sur l'axe des X, et l'autre axe ayant la valeur constante $2b$, dans le plan de base suivant la droite $Y = mX$ de ce plan. Cela veut dire que les plans $Y = mX$ passant par l'axe des Z, coupent la surface (46) selon des hyperboles de centre O ayant leurs axes non transverses de valeur constante $2b$ suivant les droites $Y = mX$ du plan de base, et les axes transverses sur l'axe des X, de valeurs variable entre b pour le plan ZOY et cero pour le plan ZOX; en particulier, pour les bissecteurs des dièdres limités par ces deux plans (pour lesquels on a $m = \pm 1$) la valeur de cet axe est $b\sqrt{2}$.

Ainsi qu'il a été observé au numéro 146, les asymptotes de ces hyperboles sont les droites d'intersection de leur plan avec les plans ι (n° 139) bissecteurs des dièdres déterminés par les plans des XZ et des XY et qui, cotés, représentent les isotropes; ces bissecteurs sont, du reste, asymptotiques de la surface (46) (n° 147).

On peut verifier aussi la proposition antérieure au moyen de la figure 52 suivante, où OM représente la droite $Y = mX$ du plan de base, la longueur de $\overline{OM}$ étant b. P étant dans le plan bissecteurs ι en question ($PM \perp \pi$), de sorte que, comme il est facile de le constater, on a $\overline{MN} = \overline{PM} = \pm bm : \sqrt{1 + m^2}$ (valeur de l'axe transverse). La droite OP est donc, en effet, l'asymptote de l'hyperbole.

Ces coupes de la surface (46) par des plans passant par l'axe des Z permettent de se donner facilement compte de la forme de la surface (fig. 55); toutes les hyperboles-coupes ont leurs centres en O et leurs

sommets à des points de l'axe des Z, compris entre $Z = \pm b$; celle qui se trouve dans le plan des XZ se reduit à l'axe des X, les asymptotes de toutes les hyperboles se trouvent à l'intersection de leur plan avec des ι.

Ainsi qu'il a été observé plus haut, en plus des hyperboles en question, les plans des coupes contiennent aussi le segment de l'axe des Z situé entre les sommets des hyperbole; coté suivant (48).

163. Les plans qui passent par l'axe des X ($Z = mY$) coupent le lieu (44) suivant l'axe des X coté (n° 148) d'après (47) et, pour $m^2 > 1$,

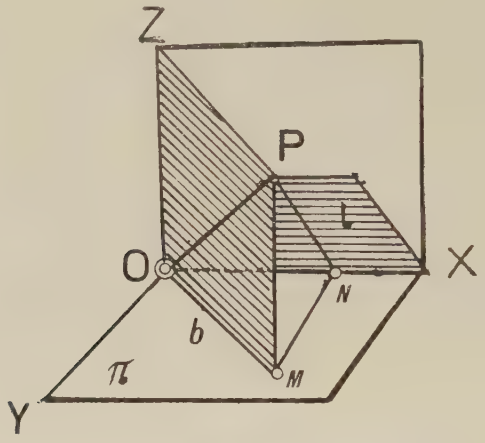


Figure 52

suivant des ellipses dont les petits axes sont, évidemment, déterminés par les segments qui joignent l'origine O aux divers points de l'hyperbole (45). Pour $m^2 = 1$ les axes deviennent infiniment grands, c'est un cas limite (section avec les plans ι représentatifs des isotropes). Et, inversement, si on pose $Y = \pm Z$; $V = \mp X$, en remplaçant dans (44), la condition ne peut être remplie que pour des valeurs infiniment grandes des coordonnées, comme limites.

Pour $m^2 < 1$ il n'y a pas d'autre coupe que l'axe des X.

Ainsi qu'il a été observé au numéro 148, les sommets du grand axe de l'ellipse sont les points de tangente des plans considérés.

164. Les plans qui passent par l'axe des Y, coupent la surface suivant des courbes qui ont même équation que la (*a*) du numero 149 en y changeant toutefois r^2 par $-b^2$; et des considérations identiques à celles faites à propos de cette équation, tenant compte, naturellement, du changement en question, conduisent à établir ce qui suit:

L'équation de ces courbes étant

$$X^2(1-m^2)+Y^2-\frac{m^2X^4}{Y^2}+b^2=0$$

il résulte que le rapport $\frac{Y}{X}$, — que l'on obtient aisément en divisant cette équation par X^2 — tend à s'annuler quand X et Y tendent aussi, comme il arrive ici, tous les deux à s'annuler. La courbe contient en effet l'origine O (comme point double); il s'en déduit donc que ces courbes sont tangentes à l'axe des X′ (intersection de leur plan avec celui des YZ) en O; il n'y a pas ici de point de maxima par rapport à cet axe parce que la condition trouvée au numéro 149, $2X^2m^2=Y^2(1-m^2)$ ne peut se réaliser, même pour des valeurs de m moindres que l'unité car elle établit un rapport entre Y et X que l'équation de la courbe, ne peut, comme on peut aisément le verifier, satisfaire. Du reste cette courbe a pour asymptotes les intersection de son plan avec les plans :; et comme elle coupe ces droites à l'origine, il faut qu'elle ait un point au fini, T, où la tangente est parallèle à l'asymptote considérée.

Nous avons calculé quelques points de cette courbe mais nous ne l'avons pas dessiné parce qu'elle n'offre aucune particularité sur celle que nous donnons ensuite :

$x=$	0;	0.793;	1.265;	2.2;
$y=$	0;	0.01;	0.2;	0.4.

La section la plus simple correspond à $m^2=1$; l'équation prend alors la forme

$$X'^4=4Y^2(Y^2+b^2)$$

$\therefore$

$$\frac{dY}{dX'}=\frac{2X^2Y}{X^4+4Y^4}=\frac{2X^3Y}{8Y^4+4Y^2b^2}=\frac{X}{Y}\frac{X^2}{4Y^2+2b^2}.$$

On voit aussi, par cette dernière, que pour $X=Y=0$, la vraie valeur de la derivée est cero, puisque, en enlevant le facteur X : Y d'indétermination (point double) quand X est nul (ce qui rend aussi Y nul) il reste l'autre facteur qui s'annule.

Nous avons calculé plusieurs points de cette courbe en prenant la valeur de b comme unité. Quant au point T, où l'on a la tangente parallèle à l'asymptote $\left(\frac{dY}{dX}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, il a pour coordonnées $X'=\sim 0.79$, $Y=\sim 0.30$.

$X = 0;\ 0.64;\ 0.791;\ 0.82;\ 0.834;\ 0.8615;\ 0.875;\ 0.902;$
$0.928;\ 0.955;\ 1.058;\ 1.31;\ 1.68;\ 1.93;\ 2.21;\ 2.63;$

$Y = 0;\ 0.20;\ 0.30;\ 0.32;\ 0.35;\ 0.36;\ 0.38;$
$0.40;\ 0.42;\ 0.5;\ 0.70;\ 1.00;\ 1.2;\ \sqrt{2};\ \sqrt{3};$

$X = 2.98;\ 3.31;\ 3.59;\ 5.565;\ 7.1414;\ 14.1774;$

$Y = 2.00;\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{15};\ 5{,}00;\ 10.00.$

La figure 53 indique la courbe correspondante.

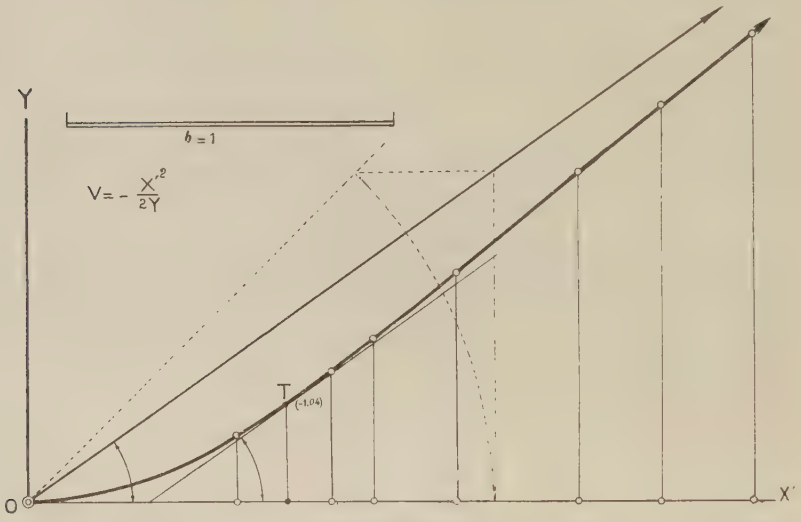


Figure 53

165. Les sections par des plans parallèles à XOZ, donnent des courbes ayant sommet sur l'hyperbole (45) et des branches hyperboliques ayant pour asymptotes les intersections de leurs plans avec les t.

166. Les coupes par des plans parallèles à celui des YOZ, donnent des courbes à deux branches symétriques se croisant sur l'axe des X, ayant également des asymptotes comme les antérieures, ce qui donne ici lieu à une observation analogue à celle faite à ce sujet au numéro 153, et cela, pour n'importe quelle valeur de X_0. Le discriminant (43) est, en effet, pour le cas présent, $27 + 32\,X_0^2$, c'est-à-dire toujours positif, de sorte que la discussion faite au numéro 154 au sujet du signe de ce déterminant, n'a plus lieu. L'inclinaison des tangentes aux branches des courbes à leur point de croisement sur l'axe des X est d'après la formule trouvée au numéro 151,

$$\frac{dY}{dZ} = \pm \frac{X_0}{\sqrt{X_0 + b^2}}.$$

167. Finalement, les sections par des plans parallèles à celui de base ($Z = Z_0$) donnent des courbes qui se coupent sur l'axe des Z quand $Z_0^2 < b^2$, et ayant des sommets au point d'intersection de leur plan avec l'hyperbole equilatère (45) pour $Z_0^2 > b^2$.

Nous avons comme équation de ces courbes

$$X^2 + Y^2 + (b^2 - Z_0^2) = \frac{X^2 Z_0^2}{Y^2} \qquad (a)$$

de sorte que l'on a

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X}{Y} \frac{Z_0^2 - Y^2}{Y^4 - X^2 Z_0^2} \qquad (b)$$

et remplaçant, en (*b*), $X^2 Z_0^2$ par sa valeur tirée de (*a*)

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X}{Y} \frac{Z_0^2 - Y^2}{X^2 + 2Y^2 + (b^2 - Z_0^2)}. \qquad (c)$$

Pour $X = Y = 0$, c'est-à-dire, au point de croisement des branches symétriques sur l'axe des Z quand $Z_0^2 < b^2$, on a, d'abord, la valeur indéterminée $\frac{0}{0}$ provenant du facteur $\frac{X}{Y}$ (point double); mais la vraie valeur est celle donnée par l'autre facteur $\frac{Z_0^2}{b^2 - Z_0^2}$. Pour $Z = b$, $\frac{dY}{dX}$ prend la valeur infinie, ce qui veut dire que la courbe a, au point de croisement de ses branches symétriques, un point d'inflexion; la tangente commune est, à ce point, perpendiculaire au plan ZOX. Au point tel que l'on a $Y^2 = Z_0^2$, la tangente est parallèle à l'axe des X, mais alors (*a*) exige que l'on ait aussi $X^2 + b^2 = X^2$ ce qui ne peut arriver que pour un point « à l'infini »; et comme le lieu $Y^2 = Z_0^2$ est constitué par les droites d'intersection du plan $Z = Z_0$, avec les [illegible], nous retrouvons que ces droites d'intersection sont des asymptotes de la courbe.

Pour $Z_0^2 > b^2$, la formule (*b*) s'annule quand X est nul, Y ne l'étant pas, ce qui arrive dans ce cas; la tangente, en ce point, est donc parallèle à l'axe des X.

Nous avons calculé quelques points des coupes qui correspondent à $Z_0 = \frac{1}{2}$, $Z_0 = 1$, $Z_0 = 2$: en prenant *b* comme unité de mesure :

$Z_0 = \frac{1}{2}$

X =	Y =
0	0
0.25	0.152
0.50	0.23
0.75	0.316
1.00	0.36
$\sqrt{2}$	0.41
$\sqrt{3}$	0.435
2.00	0.445
4.00	0.474

$Z_0 = 1$

X =	Y =
0	0
1	0.79
2	0.911
3	0.954
4	0.97

$Z_0 = 2$

X =	Y =
0	$\sqrt{3}$=1.73
1	1.8
2	1.87
3	1.93
4	1.952

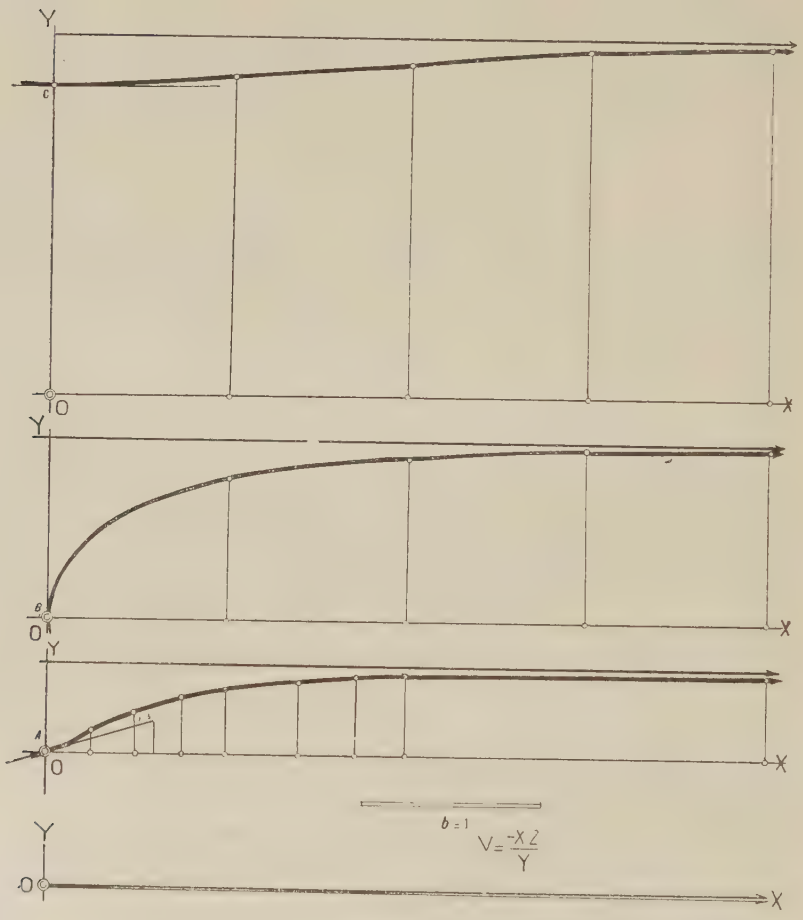


Figure 54

168. La figure 54 indique ces trois coupes; nous avons ajouté, au dessous, la coupe avec le plan de base $Z_0 = 0$ qui, comme nous l'avons vu, est constituée par l'axe des X comme droite double; la courbe immédiatement au dessus del'antérieure, correspond à $Z_0 = \frac{1}{2}$; l'inclinaison de la tangente à l'origine, calculée d'après la formule (*c*) est 1 : 3. La

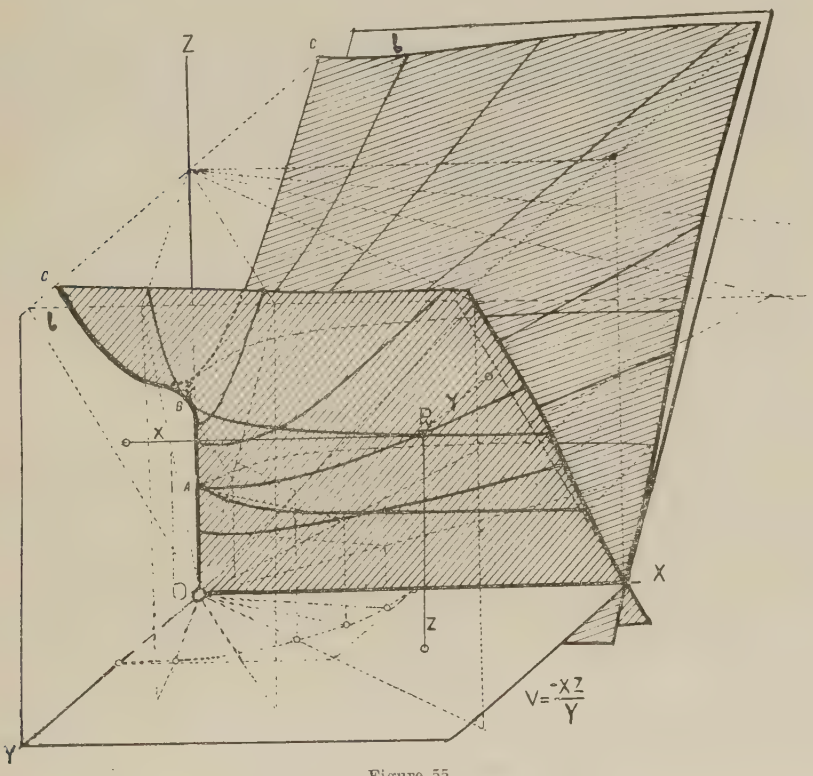


Figure 55

courbe que suit correspond à $Z_0 = 1$; nous avons observé plus haut que, à l'origine, il n'y a plus qu'une tangente qui est perpendiculaire au plan ZOY. La courbe supérieure correspond à $Z_0 = 2$; ici, pour X nul, Y ne l'est pas, et à ce point, la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des X, de sorte que entre ce point et le point à l'infini de la courbe il y a un point d'inflexion. Dans toutes ces figures nous avons indiqué l'asymptote, qui est parallèle à l'axe des abscisses à une distance égale à celle de la section par rapport au plan de base.

La figure 55 donne un aperçu de la perspective de la surface.

169. *Cas général.* — Considerons maintenant le cas le plus général

$$(Y + Vi)^2 = (a + bi)^2 - (X + Zi)^2.$$

Il résulte alors,

$$\begin{aligned} Y^2 - V^2 &= a^2 - b^2 - X^2 + Z^2 \qquad (a) \\ YV &= ab - XZ \qquad (b) \end{aligned} \tag{49}$$

La projection du lieu coté sur l'espace tridimentionnel, s'obtient en éliminant V entre les équations (*a*) et (*b*). On obtient, comme équation de cette projection,

$$Y^2 - \frac{(ab - XZ)^2}{Y^2} = a^2 - b^2 - X^2 + Z^2. \tag{50}$$

Cette surface est symétrique par rapport au plan de ZX mais elle ne l'est pas par rapport aux autres deux plans de référence. Les points

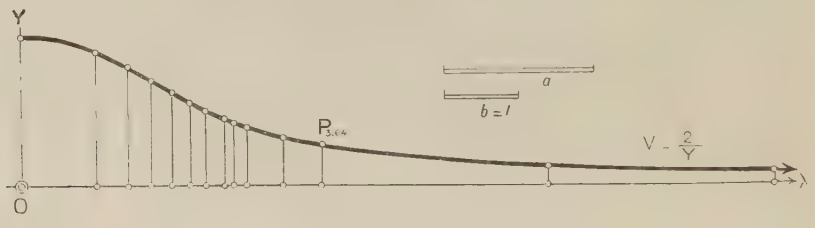


Figure 56

de cote nulle se trouvent à l'intersection de l'hyperboloïde de révolution (axe, celui des Z)

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = a^2 - b^2$$

avec le cylindre hyperbolique $XZ = ab$, de génératrices parallèles à l'axe des Y. Selon que $a^2 - b^2$ soit plus grand ou moindre que 1, l'hyperboloïde sera à une nappe ou à deux nappes.

170. Le plan de base $Z = 0$ coupe la surface (50) suivant la courbe

$$Y^2 - \frac{a^2 b^2}{Y^2} = a^2 - b^2 - X^2. \tag{51}$$

Pour $Y = 0$ nous avons $X = \pm\infty$; et pour $X = 0$, il résulte $Y = \pm a$.

La quartique (51) a donc deux branches symétriques réelles qui ont l'axe des X pour asymptote commune (fig. 56). Un point de cette courbe d'ordonnée Y, a pour cote $V = \frac{ab}{Y}$, de sorte que, pour $Y = \infty$ on

a $V = 0$, résultat qui correspond bien à ce que l'on a trouvé plus haut comme lieu des points de cote nulle.

171. La coupe avec le plan $Y = 0$ conduit, d'après (b), à établir $ab = XZ$, équation d'une hyperbole qui a pour asymptotes, les axes des Y et des Z. Mais comme pour $Z = \infty$ on à $X = 0$ on doit avoir d'après (a)

$$- V^2 = a^2 - b^2 + \infty^2,$$

condition que V ne peut satisfaire; il en découle que l'hyperbole en question ne peut appartenir tout entière au lieu (49). La condition relative à l'autre asymptote $Z = 0$, $X = \infty$ peut, en revanche, se satisfaire pour $V = \infty$; cette partie de la courbe appartient donc au lieu coté (49). Si l'on suppose en (b), que XZ n'est pas égal à ab, il faudra que V soit infiniment grand ce qui, d'après (a), correspond à une valeur également infinie de X. En résumé, la section cherchée est une partie de l'hyperbole $XZ = ab$. Pour déterminer cette partie, posons dans (a), $Z = \frac{ab}{X}$; il en résulte comme cote des points de l'hyperbole en question

$$Y^2 = X^2 - Z^2 + b^2 - a^2 = X^2 - \frac{a^2b^2}{X^2} + b^2 - a^2 = \frac{(X - a)^2 (X - b^2)}{X^2},$$

V ne peut avoir des valeurs réelles que pour $X > a$, ce qui correspond à $Z = \pm b$. La section cherchée commence, donc, aux points $X = \pm a$, $Z = \pm b$, et suit jusqu'à $X = \infty$, $Z = 0$.

La coupe faite par le plan $X = 0$, peut être déterminée et discutée comme on l'a fait pour le plan de base, en changeant X^2 par $- Z^2$. On obtient la courbe

$$Y^2 - \frac{a^2b^2}{Y^2} = a^2 - b^2 + Z^2, \qquad (52)$$

qui est constituée par deux branches symétriques. En faisant $Z = 0$ nous retrouvons, pour les sommets, la valeur $Y = + a$, et pour la cote d'un point d'ordonnée Y, la valeur $V = \frac{ab}{Y}$.

La courbe (52) a pour asymptotes les droites $Y = \pm Z$, intersection du plan $X = 0$ avec les ; représentatifs des isotropes. Le lieu (50) peut, en effet, s'exprimer ainsi :

$$\frac{Y^4}{Z^4} - \frac{Y^2}{Z^2}\left(\frac{b^2 - a^2}{Z^2} - 1\right) - \frac{a^2b^2}{Z^4} = 0,$$

$\therefore$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{Z^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{Z^2}\right)^2 + 4\frac{a^2 b^2}{Z^4}}}.$$

Quand Y tend vers l'infini, $\frac{Y}{Z}$ tend vers 1. Donc, on peut dire que, pour Z infini, on a $Z = \pm Y$.

172. Du reste, le lieu (49) est tout entier asymptotique des plans cotés représentatifs des isotropes. Pour ces derniers on a, en effet, $X = \pm V$, $Z = \pm Y$; or, les coupes de (49) par les plans $Z = mX$ passant par l'axe des Y, ont pour équation, résolue par rapport a Y^2 :

$$2Y^2 = a^2 - b^2 + X^2(m^2 - 1) \pm \\ \pm \sqrt{[a^2 - b^2 + X^2(m^2 - 1)]^2 - 4(ab - m^2X^2)^2} \qquad (53)$$

d'où il ressort que le rapport $Y : Z$, soit $Y : mX$, tend vers 1 quand Z tend vers l'infini. On a donc, à la limite, $Y = \pm Z$ quelle que soit la valeur de m (1). La formule (b) de (49), si l'on tient compte de la valeur $\frac{ab - XZ}{Y}$ de V, indique que, quand Y tend vers $\pm Z$ pour les valeurs infiniment grandes de ces coordonnées, V tend vers $\pm X$. Le signe négatif qui figure devant la quantité radicale de (53), ne fournit pas de valeur réelle pour Y, comme il est facile de le constater, mais pour les valeurs de X qui remplissent la condition $ab = mX^2$, c'est-à-dire, pour $ab = XZ$, on a $Y = 0$. Les coupes contiennent, par conséquent, un point isolé situé dans le plan $Y = 0$: c'est celui d'intersection du plan sécant et de l'hyperbole $ab = XZ$ du plan $Y = 0$.

173. Les plans qui passent par l'axe des X ($Z = mY$) donnent les quartiques

$$Y^4(1 - m^2) + Y^2[(1 - m^2)X^2 + b^2 - a^2] + 2abmXY - a^2b^2 = 0.$$

Pour $m^2 = 1$ on a plus simplement

$$Y^2(b^2 - a^2) + 2abXY - a^2b^2 = 0,$$

équation qui a pour discriminant, $X^2 + b^2 - a^2$; il ne peut donc pas y avoir d'intersection, sauf pour les valeurs de X compris entre $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$

(1) Nous avons vu que cela a lieu aussi pour les plans $Z = 0$ et $X = 0$ qui correspondent, respectivement, à $m = 0$ et à $m = \infty$, et on le demontrerait de même pour des plans passant par l'axe de Y. Voir aussi plus bas numéro 173.

et $-\sqrt{a^2-b^2}$. Mais alors cette coupe, malgré qu'elle a l'inclination des plans cotés représentatifs des isotropes, n'appartient pas à ces derniers plans parce que les cotes V des points communs ne sont pas les mêmes pour les deux surfaces.

Nous avons déjà vérifié ce fait pour les cas particuliers $a=0$, ou $b=0$ étudiés plus haut (n°s 148 et 163); la ligne d'intersection devient, dans ces cas, l'axe des X tout entier (pour $a=0$), ou bien cet axe moins le segment compris entre $-a$ et $-a$, si b est nul. La condition antérieure $X^2+b^2-a^2>0$ se réduit, en effet, pour ces cas, à $X^2-a^2>0$ ou à $X^2+b^2>0$; or, cela signifie que X ne doit pas être compris entre $-a$ et $+a$, ou que X ne peut avoir aucune valeur. Du reste, dans les deux cas en question, la condition $Y=O=Z$ s'impose, car autrement il y aurait incompatibilité entre les deux équations des groupes (30) et (44). Pour les lienx représentés par ces groupes, les cotes des points en question remplissent les relations hyperboliques $V^2=X^2-a^2$ ou $V^2=X^2+b^2$ (formules 32 et 47), tandis que pour les plans cotés représentatifs des isotropes les cotes de ces mêmes points sont nulles.

Revenant au cas général, et laissant de côté les cotes, nous avons, donc, des points qui ont mêmes coordonnées X, Y, Z sur la surface (49) et sur les plans $Y^2=Z^2$; et pour les valeurs infiniment grandes des coordonnées, à savoir $X=\infty$, $Y=\pm Z=\infty$, les cotes sont aussi communes $V=-X=\infty$, car, ces valeurs satisfont à la fois à ces plans $Y^2=Z^2$ ainsi qu'au lieu (49), comme nous l'avons vu.

174. Un plan parallèle à celui des YZ, soit $X=X_0$ donne comme coupe un lieu qui est, d'abord, satisfait pour les coordonnées $Y=\pm Z=\infty$, $V=\pm X=\pm X_0$, ce qui est conséquence du caractère asymptotique des plans ι relativement à la surface (49); mais dans l'équation de la coupe

$$Y^4-(a^2-b^2-X_0^2+Z^2)\,Y^2+a^2b^2+X_0^2Z^2-2abX_0Z=0,$$

la condition $Y=\pm Z$ conduit à établir

$$Y^2(b^2-a^2)+2abX_0Y-a^2b^2=0$$

qui, pour les valeurs positives du discriminant $X_0^2+b^2-a^2$ offre deux autres points d'intersection des plans, les cotes étant mises de côté, car elles ne se correspondent pas comme dans l'exemple traité plus haut. Du moment que la courbe a ainsi (les cotes mises à part), un point au fini où elle est tangente à son asymptote (pour la valeur

nulle du discriminant $X_0^2 + b^2 - a^2$), ou bien deux point communs (pour une valeur positive de ce trinôme) il en résulte des points de distance maxima par rapport à cette asymptote; et on peut se poser des problèmes comme celui que nous avons résolu au numéro 153.

175. Ces coupes par des plans parallèles à celui des YOZ (soient $X = X_0$) ont pour équations

$$Y^2 - \frac{(ab - X_0Z)^2}{Y^2} = (a^2 - b^2 - X_0^2) + Z^2, \qquad V = \frac{ab - X_0Z}{Y}$$

soit

$$2Y^2 = -(a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2) \pm \\ \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2)^2 + 4(ab - X_0Z)^2}.$$

Le discriminant étant positif et plus grand que $+(a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2)$, il y aura toujours une solution, et une seule, pour Y, quelle que soit la valeur donné à X_0, et c'est celle qui correspond au signe positif placé devant le radical; mais il faut, cependant, distinguer deux cas : si la valeur de $a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2$ est négative alors, pour $Z = \frac{ab}{X}$, Y prend la valeur nulle ayant aussi des valeurs réelles infiniment petites; il s'agit donc d'un point courant de la courbe. Mais si la valeur $a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2$ est négative, Y prend aussi, pour le signe négatif placé devant le radical, la valeur nulle pour $Z = \frac{ab}{X}$, mais elle n'a pas des valeurs réelles infiniment petites; il s'agit donc d'un point singulier isolé de la courbe tandis que le point courant qui correspond à la dite valeur de Z est celui qui provient, comme les proches, du signe + placé devant le radical, et donne pour Y cette même valeur de Z. Nous avons alors un sommet, point de minima de Y.

Dans le premier cas, nous avons, pour $Y = 0$, un point de croisement de branches sur l'axe des Z et deux tangentes dont les inclinaisons s'obtiennent d'après les règles ordinaires du calcul infinitésimal. Mais la condition $X_0Z = 0$, en considerant X_0 comme une variable, est justement l'équation de la hyperbole que nous avons trouvée comme coupe de la surface par le plan des ZOX. Nous voyons, à présent, que les points de cette hyperbole forment le lieu constitué d'un côté, par les points de croisement des branches des coupes par les plans parallèles à celui des YZ, et d'un autre, par les points isolés singuliers. Le passage de l'un à l'autre de ces types de points s'obtient en resolvant le système

$$a^2 - b^2 - X_0^2 + Z^2 = 0, \qquad ZX_0 = ab$$

qui donne $X_0 = \pm a$.

Donc, pour les plans parallèles à celui des YZ compris entre les distances $+a$ et $-a$, la coupe, comme nous l'avons déjà observé au numéro 151, ne touche pas le plan des ZX, si bien elle a des points isolés à l'intersection de leurs plans avec l'hyperbole $XZ = ab$, mais les cotes de ces points n'étant pas réelles, elles n'appartiennent pas, en fait à la surface cotée représentative du lieu que nous étudions. Pour les deux plans $X_0^2 = a^2$, la coupe touche le plan ZX au point d'intersection avec l'hyperbole en question, la cote au point de tangente est nulle. Pour les autres plans, les coupes auront aussi des branches se croisant aux points d'intersections des plans avec la susdite hyperbole. Pour les plans $X_0^2 < a^2$, la coupe a des sommets.

Cherchons les inclinaisons des tangentes au point de croisement des branches des coupes procedant d'une manière analogue à celle suivie au numéro 152.

Nous avons

$$\frac{dY}{dZ} = Y\,\frac{ZY^2 - (ab - X_0Z)X_0}{Y_4 + (ab - X_0Z)^2} = \frac{ZY - \dfrac{ab - X_0Z}{Y}X_0}{Y^2 - \left(\dfrac{ab - X_0Z}{Y}\right)^2}.$$

Pour le point répondant à la condition $Y = 0$, $Z = \dfrac{ab}{X_0}$, qui est celui que nous considérons, la dérivée prend la forme indéterminée (comme il le faut puisqu'il s'agit d'un point double), mais pour obtenir la « vraie valeur », qui est celle cherchée des inclinaisons des tangentes à la courbe de coupe au point de croisement, nous écrirons ainsi l'équation de la courbe en question

$$\frac{(ab - X_0Z)^2}{Y^2} = Y^2 - (a^2 - b^2) + X_0^2 - Z^2.$$

Pour le point considéré, nous avons donc, comme valeur vraie du premier membre, celui qui est fournie par le second soit $X_0^2 - a^2 + b^2 - \dfrac{a^2b^2}{X_0^2}$. Remplaçant cette valeur dans le dernier membre de l'expression de $\dfrac{dY}{dZ}$ donnée plus haut, on trouve pour les inclinaisons cherchées (par rapport à l'axe des Z)

$$\frac{\pm X_0}{\sqrt{b^2 - a^2 + X_0^2 - \left(\dfrac{ab}{X_0}\right)^2}}.$$

Pour $X_0 = \infty$ on a $\frac{dY}{dZ} = \pm 1$, comme il le fallait.

Si dans cette expression on fait $a = r$ et $b = 0$, on retombe bien dans celle trouvée au numéro 152.

Pour les coupes limites, $X_0^2 = a^2$, $\frac{dZ}{dY}$ devient nul, ce qui signifie que la tangente aux points de croisement sur le plan des ZOY, est parallèle à l'axe des Y; or, pour $X_0^2 < a^2$ nous avons vu que les courbes ont des sommets où la tangente est parallèle à l'axe des Z, on doit donc répéter ici l'observation déjà faite au numéro 152 sur le brusque changement de la direction des tangentes. Pour les sommets en question on a $\frac{dY}{dZ} = 0$. Or, de

$$Y \frac{dY}{dZ} = Z - \frac{(a^2 - b^2 - X_0^2) Z + 2 (ab - X_0 Z) X_0}{\sqrt{(a^2 - b^2 - X_0^2 - Z^2)^2 - 4 (ab - X_0 Z)^2}} \qquad a)$$

l'annulation du premier membre entraine celle du second, ce qui nous donne une équation à radicaux. Pour la résoudre, il faut faire une élévation au carré ce qui introduit une nouvelle racine qui correspond au signe positif au lieu du négatif placé devant la fraction du second membre. Il faut ensuite éliminer cette racine nouvelle. En effectuant les opérations et après avoir supprimé le facteur commun $(ab - X_0 Z)$ qui correspond au point singulier isolé de la coupe, on aboutit finalement à l'équation

$$abZ^2 - X_0 (a^2 - b^2 - 2X_0^2) Z - abX_0^2 = 0.$$

La solution qui correspond au problème est, donc, l'une ou l'autre des suivantes

$$2abZ = X_0 \left(a^2 - b^2 - 2X_0^2 \pm \sqrt{(a^2 - b^2 - 2X_0^2)^2 + 4a^2b^2}\right). \qquad b)$$

C'est celle qui annule le second membre de (a).

Les sections ne sont pas symétriques par rapport au plan des YZ. Ainsi les coupes par les plans $X = X_0$ et $X = -X_0$ sont telles que la valeur de Y qui correspond à certaine valeur de Z relative à une d'elles est celle qui dans l'autre correspond à $-Z$.

176. Examinons les cas particulier

$$y^2 = (2 - i)^2 - x^2.$$

Nous avons ici :

$$a = 2; \qquad b = 1; \qquad r^2 = (2 + i)^2 = 3 + 4i; \qquad a^2 - b^2 = 3.$$

Donc, dans la terme OXYZ, la surface cotée représentative du lieu est

$$Y^2 - \frac{(2 - XZ)^2}{Y^2} = 3 - X^2 + Z^2; \qquad V = \frac{2 - XZ}{Y}.$$

Nous avons calculé quelques points de la coupe $\left(Y^2 - \frac{4}{Y^2} = 3 - X^2, \; V = \frac{2}{Y}\right)$ avec le plan de base. Comme il y a ici symétrie par rapport aux axes, toutes les valeurs du tableau suivant doivent se prendre avec le double signe, positif et négatif.

$X = 0$; 1.00; 1.41 $(\sqrt{2})$; 1.73 $(\sqrt{3})$; 2.00; 2.24 $(\sqrt{5})$;
2.45 $(\sqrt{6})$; 2.65 $(\sqrt{7})$; 2.83 $(\sqrt{8})$; 3.00;

$Y = 2$; 1.80; 1.60; 1.41 $(\sqrt{2})$; 1.25; 1.115;
1.00; 0.91; 0.8375; 0.77;

$V = 1$; 10/9; 1.25; 1.41 $(\sqrt{2})$; 1.60; 1.79;
2.00; 2.20; 2.39; 2.60.

$X = 3.46\,(\sqrt{12})$; 4.00; 7.00; 8.00; 10.00; ∞;

$Y = 0.6515$; 0.55; 0.28; 0.255; 0.2; 0;

$V = 3.07$; 3.64; 7.114; 0.78; 10.00; ∞.

Cette coupe est représentée par la figure 56.

177. La section par le plan $Y = 0$, a pour équation

$$-V^2 = 3 - X^2 - Z^2, \qquad XZ = 2.$$

Nous avons donc deux parties de l'hyperbole $XZ = 2$; les points de cotes réelles commencent à partir de ceux d'abscisses ± 2 et d'ordonnées ± 1 (les signes positifs et les négatifs devant se correspondre, leur cote étant nulle) et terminent, respectivement, aux points à l'infini positif et négatif, de l'axe des X; la cote d'un point d'abscisse X est fourni par l'équation

$$X^2 - \frac{4}{X^2} - 3 = V^2.$$

178. La coupe par le plan $X = 0$ a pour équation

$$Y^2 - \frac{4}{Y^2} = 3 + Z^2, \qquad V = \frac{2}{Y}.$$

Nous avons calculé quelques points, les résultats étant indiqués par la table suivante. Il faut, ici aussi, prendre chaque valeur avec le double signe $\pm$.

Z = 0;	1.00;	$\sqrt{2}$;	$\sqrt{3}$;	2.00;	$\sqrt{5}$;	$\sqrt{6}$;	$\sqrt{7}$;	$\sqrt{8}$;	
	3.00;	$\sqrt{12}$;	4.00;	7.00;	10;	∞;			
Y = 2;	2.2;	2.39;	2.57;	2.74;	2.91;	3.07;	3.225;	3.37;	
	3.515;	3.905;	4.385;	7.22;	10.15;	∞;			
V = 1;	0.9;	0.84;	0.78;	0.73;	0.68;	0.65;	0.62;	0.59;	
	0.57;	0.54;	0.45;	0.28;	0.098;	0.			

La figure 57 représente cette coupe.

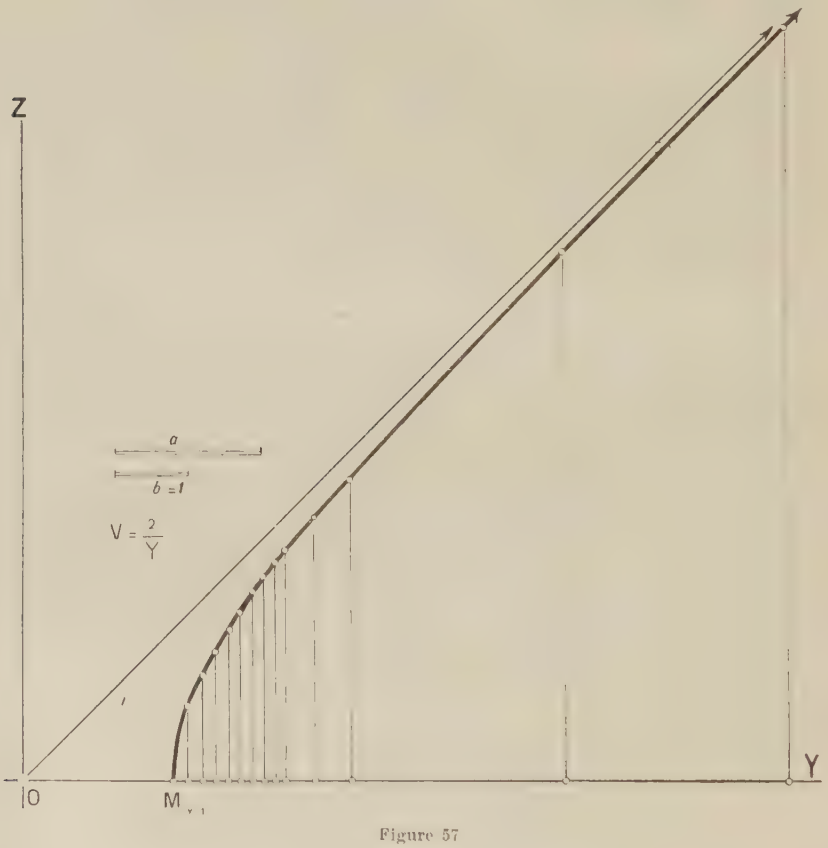


Figure 57

179. Coupe par le plan $Z = 3$ (figure 58)

$$Y^2 - \frac{(2-3X)^2}{Y^2} = 12 - X^2; \qquad V = \frac{2-3X}{Y};$$

$X = -4.0;$	$-3.0;$	$-2.0;$	$-1.0;$	$0;$		
		$1.0;$	$2.0;$	$3.0;$	$4.0;$	
$Y = \pm 3.49;$	$\pm 3.55;$	$\pm 3.60;$	$\pm 3.59;$	$\pm 3.51;$		
		$\pm 3.335;$	$\pm 3.15;$	$\pm 2.945;$	$\pm 2.865;$	
$V = \pm 4.0;$	$\pm 3.1;$	$\pm 2.22;$	$\pm 1.40;$	$\pm 0.57;$		
		$\mp 0.30;$	$\mp 1.27;$	$\mp 2.37;$	$\mp 3.49.$	

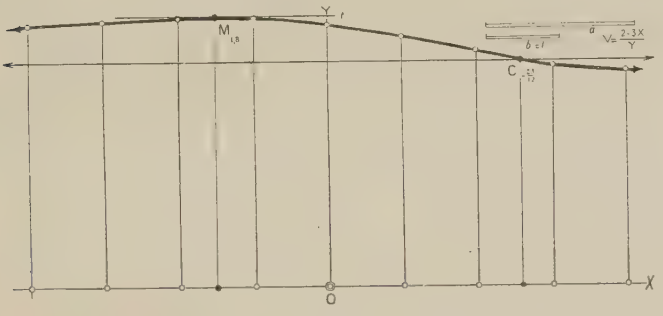


Figure 58

La cote nulle correspond à $X = \frac{2}{3}$, $Y = \pm 3.40$. On voit que la courbe a un point M de Y *maxima* entre $X = -2$ et $X = -1$. Pour $X = \frac{31}{12}$, $Y = 3$, on a un point C qui appartient au plan ι, de sorte que la courbe a deux *maxima* par rapport à son asymptote. Si l'on établit la condition $\frac{dY}{dX} = 0$, on obtient, sans difficulté, $Y^2 = \frac{9X-6}{X}$, valeur de Y qui, portée dans l'équation de la courbe, donne, après quelques simplifications et l'élimination du point à l'infini

$$2X^2 - 9X - 18 = 0$$

dont les racines sont 6 et -1.5; les valeurs de Y correspondantes étant $\sqrt{8} = 2.83$ et $\sqrt{13} = 3.6$.

180. La coupe par le plan $Z = 4$ donne pour

$$\frac{dY}{dX} = 0, \qquad X = 2 \text{ ou } 8,$$

et pour le point de croisement $X = Y = \frac{13}{4}$.

Pour $Z = -4$ il faut changer les signes de X.

181. Voyons, encore, les coupes par les plans $X_0 = \sqrt{3}$ et $X_0 = 4$, Pour le premier, comme X_0 est moindre que la distance limite $X_0 = 2$, nous avons une courbe qui a un sommet à tangente parallèle à l'axe des

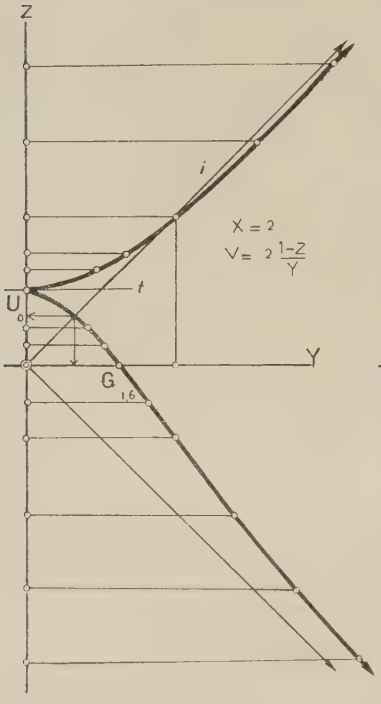


Figure 59

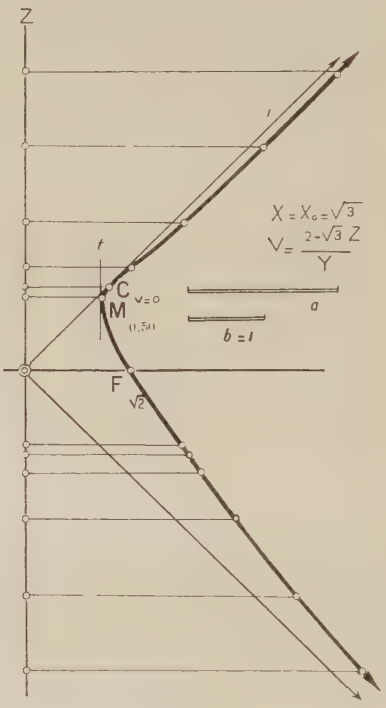


Figure 60

Z; d'après la formule *b*) du n° 175, en obtient, comme coordonnées de ce sommet (M); Y = 1,00, Z = $\sqrt{3}$: 2. La courbe a aussi deux points tels que pour l'un, $Z = Y = \frac{3}{\sqrt{2}}$, et pour l'autre $Z = -Y = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire, deux points appartenant aux plans ι. Si pour ces points I on calcule $\frac{dZ}{dY}$, on trouve la valeur ± 1, ce qui signifie que la courbe est, a ces endroits, tangente à l'intersection de son plan avec les ι; et comme

cette même droite est asymptote de la courbe, il doit y avoir un point de maxima par rapport a la droite en question; on a aussi par ces maxima $\frac{dY}{dZ} = \pm 1$; il peuvent s'obtenir en appliquant les règles ordinaires du calcul différentiel, et tenant compte que l'équation de la courbe est

$$Y^4 - Z^2 Y^2 - (2 - \sqrt{3}Z)^2 = 0, \qquad V = \frac{2 - \sqrt{3}Z}{Y}.$$

Nous avons calculé quelques points de cette courbe, qui sont indiqués au tableau suivant, lequel nous a servi pour dessiner la coupe (fig. 60).

$Z = 0;$ $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866;$ $1.00;$ $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.13;$

$\frac{4\sqrt{3}}{5} = 1.38;$ $2.00;$ $3.00;$ $4.00;$

$Y = \pm\sqrt{2} = \pm 1.41;$ $\pm 1.00;$ $\pm 1.03;$ $\pm\frac{2}{\sqrt{3}} = \pm 1.13;$

$\pm\sqrt{2} = \pm 1.41;$ $\pm 2.12;$ $\pm 3.17;$ $\pm 4.17;$

$V = \pm\sqrt{2};$ $\pm 0.50;$ $\pm 0.26;$ $0;$

$\mp 0.282;$ $\mp 0.09;$ $\mp 1.01;$ $\mp 1.18.$

$Z = -1.0;$ $\frac{-2}{\sqrt{3}};$ $\frac{-4\sqrt{3}}{5};$ $-2.00;$

$-3.00;$ $-2\sqrt{3};$ $-4.00;$

$Y = \pm 2.07;$ $\pm 2.173;$ $\pm 2.34;$ $\pm 2.81;$

$\pm 3.60;$ $\pm 4.0;$ $\pm 4.47;$

$V = \pm 1.32;$ $\pm 1.84;$ $\pm 1.88;$ $\pm 1.95;$

$\pm 1.997;$ $\pm 2.00;$ $\pm 2.04.$

Pour $Z = 2 : \sqrt{3}$ on a, encore, la solution $Y = 0$ qui correspond au point singulier isolé, intersection du plan de la courbe avec l'hyperbole $XZ = 2$, point donc la cote n'est pas réelle.

182. Quant à la coupe par le plan $X_0 = 4$, nous avons à présent, un croisement de branches (fig. 61) au point C où ce plan coupe l'hyperbole en question, point dont l'ordonné est $Z = 0.50$. L'inclinaison des tangentes aux branches en ce point est (d'après la formule *a*), n° 175) $\frac{8}{\sqrt{51}}$,

soit 1 : 1.12, environ, par rapport à l'axe des Z; par conséquent la valeur reciproque est son inclinaison par rapport à celui des Y.

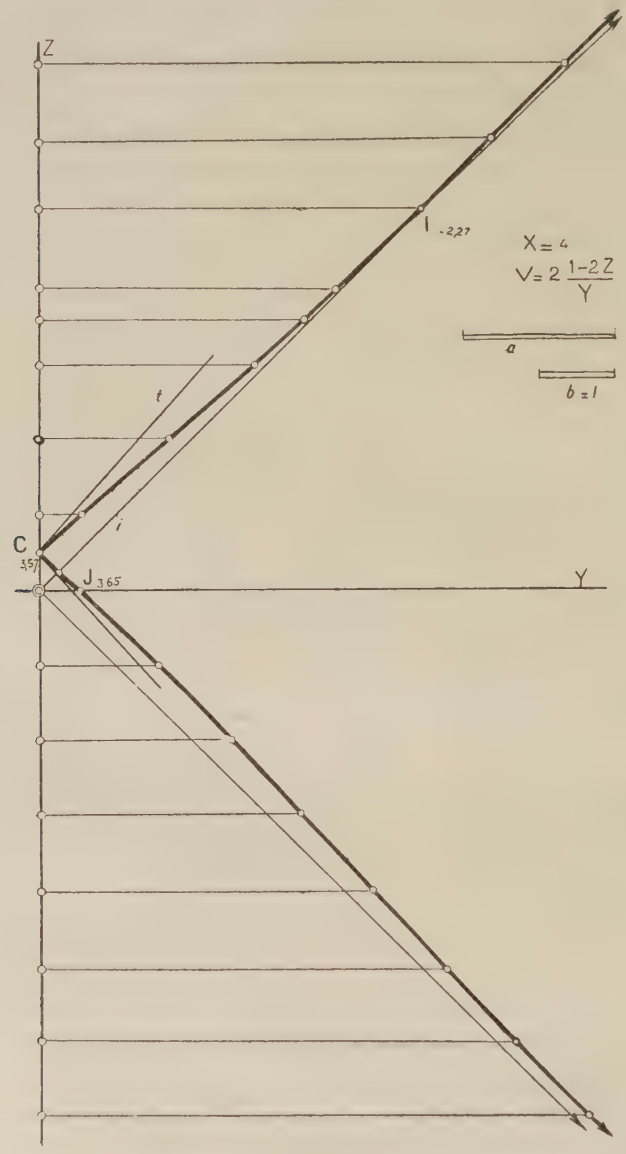


Figure 61

Si l'on établit la condition $Y^2 = Z^2$ qui correspond à l'intersection du plan de la coupe avec le système des plans t, on obtient sans diffi-

culté, l'équation $3Y^2 - 16Y + 4 = 0$, qui donne pour les abscisses de ces points : $Y_1 = \pm 0.23$ et $Y_2 = \pm 5.07$. Voici, du reste, les coordonnées de plusieurs points de la courbe, points qui nous ont aussi servi pour la dessiner (fig. 61); elle est symétrique par rapport à l'axe des Z : de sorte que les valeurs de Y doivent être considérées avec le double signe : positif et négatif.

$Z = 0.0;\quad 0.23;\quad 0.25;\quad 0.5;\quad 1.00;\quad 2.00;\quad 3.00;$
$\sqrt{13} = 3.61;\quad 4.00;\quad 5.07;\quad 6.00;\quad 7.00;$

$Y = 0.55;\quad 0.23;\quad 0.28;\quad 0.0;\quad 0.57;\quad 1.73;\quad 2.86;$
$3.525;\quad 3.95;\quad 5.07;\quad 6.06;\quad 7.05.$

$Z = -0.25;\quad -1.00;\quad -2.00;\quad -3.00;$
$-\sqrt{13};\quad -4.00;\quad -5.00;\quad -6.00;\quad -7.00;$

$Y = \quad 0.80;\quad 1.575;\quad 2.54;\quad 3.485;$
$4.05;\quad 4.415;\quad 5.37;\quad 6.35;\quad 7.28.$

Nous savons que le cote d'un point des coordonnées Y, Z est

$$Y = \frac{2 - 4Z}{Y}.$$

183. La figure 59 se rapporte à la coupe par le plan intermédiaire $X_0 = 2$ (les Y doivent toujours être pris avec le double signe).

$Z = 0.0;\quad 1/4;\quad 1/2;\quad 1;\quad 5/4;\quad 3/2;\quad 2;\quad 3;\quad 4;$
$Y = 1.25;\quad 1.05;\quad 0.83;\quad 0.0;\quad 0.9325;\quad 1.34;\quad 2.00;\quad 3.11;\quad 4.135.$

$Z = -1/2;\quad -1.00;\quad -2.00;\quad -3.00;\quad -4.00;$
$Y = \quad 1.03;\quad 2.00;\quad 2.77;\quad 3.60;\quad 4.47.$

184. Enfin, la figure 62 se rapport à la coupe $X_0 = 8$.

$Z = -4.0;\quad -3.0;\quad 2.0;\quad 1.0;\quad 0.0;\quad 0.127;$
$1.0;\quad 2.0;\quad 3.0:\quad 4,0;\quad 10.56;$

$Y = \quad 4.27;\quad 3.27;\quad 2.28;\quad 1.27;\quad 0.255;\quad 0.127;$
$0.77;\quad 1.81;\quad 2.84;\quad 3.87;\quad 10.56.$

185. Cherchons finalement l'intersection avec un des plans $Y = \pm Z$. Nous savons qu'ils sont tangents à la surface cotée, à l'infini; mais nous avons aussi vu plus haut (n° 173) que, à partir de l'abscisse X_0 qui remplit la condition $X_0^2 + b^2 - a^2 = 0$, c'est-à-dire, dans le cas

présent, à partir de $X_0 = \pm\sqrt{3}$ il existe une coupe apparente (égalité des ordonnées X, Y, Z, mais non de V). Il s'agit, en somme, d'étudier l'équation :

$$\frac{(2 \mp XY)^2}{Y^2} = 3 - X^2,$$

c'est-à-dire,

$$3Y^2 \mp 4XY + 4 = 0.$$

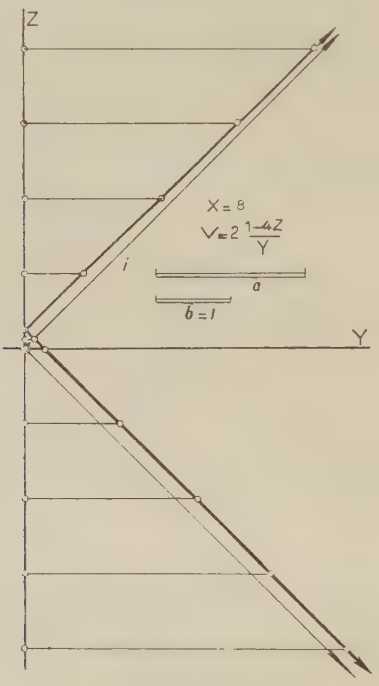


Figure 62

Pour rapporter cette dernière à un axe des Y appartenant au plan de la coupe, il faudra y remplacer Y^2 par $\frac{Y^2}{2}$; nous avons alors,

$$Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}(X \pm \sqrt{X^2 - 3}) \qquad \text{ou} \qquad Y = \frac{2\sqrt{2}}{3}(-X \pm \sqrt{X^2 - 3}).$$

La première formule, pour la coupe avec le plan $Y = Z$, et l'autre pour le plan $Y = -Z$. Quand aux cotes des points communs, elles sont, pour les isotropes, telles que l'on ait $V = \mp X$. Tandis que pour la surface de quatrième degrè, elle satisfont à la condition

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{Y} - X = \frac{3}{X \pm \sqrt{X^2 - 3}} - X = \mp \sqrt{X^2 - 3}$$

pour les points d'intersection avec le plan $Z = Y$.

Nous avons calculé quelques points de la courbe ce qui nous a permis de la tracer (fig. 63).

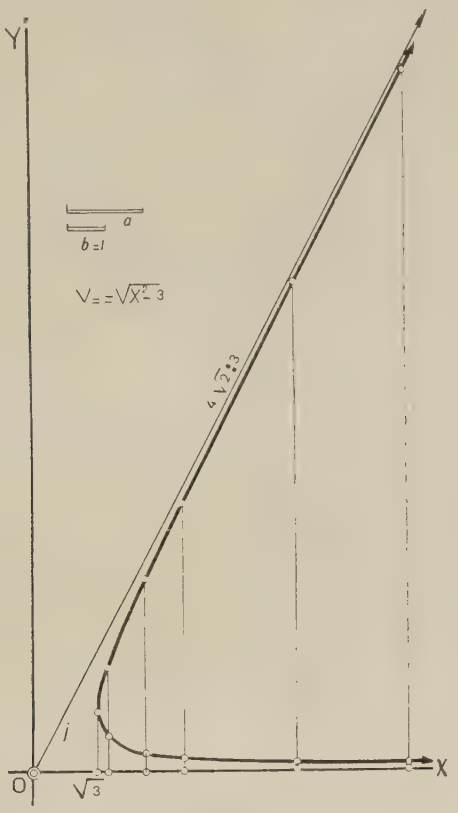


Figure 63

Observons que l'on a

$$\frac{Y}{X} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1 \pm \sqrt{-1\frac{3}{X^2}}\right).$$

Quand X crôit sans cesse, $\frac{Y}{X}$ tend vers

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}(1 \pm 1),$$

soit, entre 1.886 et 0. Il en résulte que les deux branches de la courbe ont des asymptotes qui sont l'axe des X et la droite j d'inclination $4\sqrt{2} : 3$.

Le tableau suivant donne les abscisses et les ordonnées et les cotes de la ligne (rapportée à l'axe des Y situé dans son plan) :

$X = \sqrt{3};$	2.00;	3.00;	4.00;	7.00;	10.00;	$\infty;$
$Y_1 = 1.63;$	2.82;	5.12;	7.15;	12.95;	18.66;	$\infty;$
$Y_2 = 1.63;$	0.94;	0.52;	0.37;	0.21;	0.14;	0;
$V_1 = 0.00;$	$-1.00;$	$-\sqrt{6};$	$-\sqrt{13};$	$-\sqrt{46};$	$-\sqrt{97};$	$-\infty;$
$V_2 = 0.00;$	$+1.00;$	$+\sqrt{6};$	$+\sqrt{13};$	$+\sqrt{46};$	$+\sqrt{97};$	$+\infty.$

Pour les valeurs négatives de X, il faut changer aussi les signes de Y. Les cotes ne varient pas. Pour la coupe avec l'autre isotrope $Y = -Z$ il faut, les signes de X (et partant de V), restant les mêmes, changer les signes correspondants des Y. Comme nous l'avons déjà constaté, il n'y a pas de symétrie par rapport aux plans des YZ, et des XZ; mais cette symétrie se conserve par rapport au plan des XY.

186. La figure 64 est une vue en perspective de la surface cotée représentative de la circonférence $y^2 = (2 - i)^2 - x^2$ etudiée.

187. Si au lieu de l'équation $x^2 - y^2 = r^2$ nous avions à considérer l'équation

$$(x - m)^2 - (y - n)^2 = r^2$$

m et n étant des nombres réels, tout se réduirait à changer dans les formules obtenues, X par $X - m$ et Y par $Y - n$, les Z et les V restant les mêmes. Dans la représentation graphique, le centre O du lieu apparaîtrait déplacé, dans le plan de base, de l'abscisse m et de l'ordonnée n. Il s'agirait d'une translation parallèle de la figure, de façon à donner au centre du lieu, la position en question. Maintenant, si m et n étaient les diplets $m = m_1 + m_2 i$, $n = n_1 + n_2 i$, alors, il faudrait changer dans les formules X par $X - m_1$, Y par $Y - n_1$, Z par $Z - m_2$ et V par $V - n_2$. Dans la représentation graphique, le centre du lieu se trouverait deplacé dans l'espace de $X_0 = m_1$, $Y_0 = n_1$, $Z_0 = m_2$ et toutes les cotes viendraient, nous le répétons, diminuées de la quantité n_2. Il s'agirait d'une translation parallèle de la figure dans l'espace de manière à donner au centre du lieu par rapport à celui des coordonnées la position qui correspond a X_0, Y_0, Z_0, avec diminution simultanée des cotes de la dite quantité n_2.

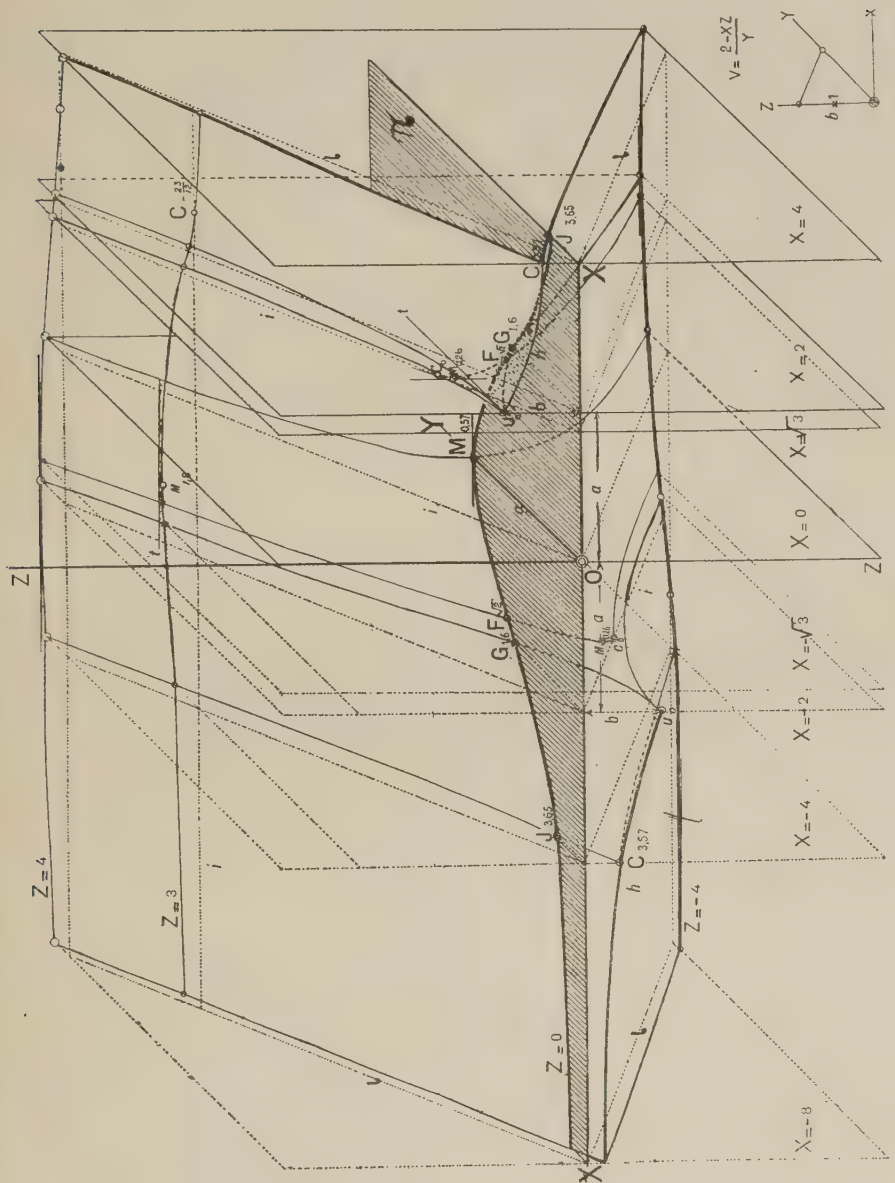


Figure 64

c) Les rotations « imaginaires ». La formule de Laguerre

188. Nous sommes, à présent, en mesure de donner une interprétation graphique aux rotations dites « imaginaires ».

Soit P un point de coordonnées x et y (x et y étant des diplets). Ce point détermine avec l'origine O une droite OP dont le coefficient angulaire m est, par définition, le rapport $\frac{y}{x}$; posons que, après les calculs exécutés, $m = p + qi$. Ce point P a, aussi, une « distance » d à l'origine O qui est, par definition, exprimée par $d = \sqrt{x^2 + y^2}$; posons également que, après les calculs exécutés, on ait $d = a + bi$. La droite OX détermine, à son tour, un angle α avec l'axe des x, angle exprimé par la formule (37) jointe à la (7) ou à la (8). Par exemple, si $m = 3 - 5i$ alors :

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{11}\left(1 - \frac{\left(\frac{-2}{11}\right)^2}{3} + \frac{\left(\frac{-2}{11}\right)^4}{5} - \frac{\left(\frac{-2}{11}\right)^6}{7} + \ldots\right) + \\ + \frac{1}{4}\log_e \frac{137}{117}\, i - k\pi.$$

189. Faire tourner le point P autour de O de l'angle diplet A, signifie, conventionnellement et comme une extension de la notion courante de rotation (qui n'en est qu'un cas particulier), porter P en P′ de coordonnées telles qu'elles remplissent les deux conditions suivantes :

1° La distance d n'est pas altérée;

2° La droite OP′ a un coefficient angulaire M tel que si $\mu = \text{tang } A$ (μ étant défini par la formule de la note 127 tenant compte des formules (9), (10) et (14)) M remplisse la condition

$$M = \frac{\mu + m}{1 - \mu m} = \gamma + \delta i.$$

L'équation de la droite OP′ étant alors $y' = Mx'$.

Or, le lieu des points dont la distance à l'origine O est constant, est la circonférence vectorielle $x^2 + y^2 = d^2$ que nous avons appris à représenter graphiquement; donc, les points P et P′ appartiennent à la surface courbe cotée qui représente la circonférence en question : il s'agit, alors, de déterminer le point P′ de cette surface cotée tel que la droite OP′ ait le coefficient angulaire M. Nous avons également appris à représenter cette droite au moyen d'un plan coté. L'intersec-

tion de ce plan coté avec la surface courbe cotée en question est bien le point cherché. On commencera, d'abord, par négliger les cotes en cherchant l'intersection de la surface avec le plan; on obtient ainsi une ligne dont chaque point a une certaine cote, différente selon que l'on la considère comme appartenant au plan ou à la surface courbe; mais il y aura un point, et un seul, qui aura même cote pour les deux lieux : ce sera le point P′. On peut réaliser les opérations soit graphiquement par les procédés de la géométrie descriptive (comme on en a vu un exemple au n° 157) ou analytiquement au moyen des équations correspondantes.

190. Ainsi, si l'on a $x = X + Zi$, $y = Y + Vi$ comme coordonnées, données, du point P; il résultera :

$$d^2 = x^2 + y^2 = X^2 - Z^2 + Y^2 - V^2 + 2(XZ + YV)\,i$$

donc, si $x' = X' + Z'i$, $y' = Y' + V'i$, sont les coordonnées cherchées du point P′, on devra avoir

$$X'^2 + Y'^2 - (Z'^2 + V'^2) = X^2 + Y^2 - (Z^2 + V^2) \qquad (a)$$

$$X'Z' + Y'V' = XZ + YV. \qquad (b)$$

D'un autre côté nous avons aussi :

$$Y' + V'i = M(X' + Z'i) = (\gamma + \beta i)(X' + Z'i)$$

donc,

$$Y' = \gamma X' - \beta Z' \qquad (c)$$

$$V' = \gamma Z' + \beta X'. \qquad (d)$$

Les quatre équations (a), (b), (c), (d) permettent de déterminer les quatre inconnues X′, Y′, Z′ V′, et, par conséquent, le point P′.

191. L'interprétation générale de la formule de Laguerre (n° 77), n'offre aucune difficulté : Maintenant, les droites d et d' sont représentées par des plans cotés, les isotropes par les plans ι. L'angle $\alpha = (d, d')$ est le diplet defini comme il a été dit aux numéros 120 et 121 (formules (27) et (5)), ou par des constructions graphiques équivalentes, car, naturellement, il n'y a plus ici pour concevoir cet angle, aucun angle plan ou dièdre de l'intuition. Les côtés d, d' de cet angle son représentés par deux plans cotés, ainsi qu'il a été exprimé : ils définissent le diplet en question, et l'on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m' - m}{1 + mm'}, \qquad (a)$$

m et m' étant les diplets coefficients angulaires de d et d'. Avec tang α, on définit α, soit $\alpha = (d, d')$.

Considerons les quatre plans cotés représentatifs de d et d', et des des isotropes i. La définition analytique de « rapport anharmonique » peut être objectivée si l'on coupe ces quatre droites par la droite $y = 1$ ($Y = 1$, $V = 0$) qui est représentée par un plan parallèle à celui des XZ à la distance unitaire, et tout entier de cote nulle. L'on a, alors, comme intersection, d'après les formules (29) du numéro 137 ($m = a + bi = \text{tang } \varphi$, $m' = a' + b'i = \text{tang } \varphi'$ étant les coefficients angulaires de d et d', ceux des isotropes étant, comme nous savons $m = \pm i$), quatre points du plan $Y = 1$ de cote nulle.

$$X_1 = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad X_2 = \frac{a'}{a'^2 + b'^2} \qquad X_3 = 0 \qquad X_4 = 0$$

$$Z_1 = \frac{-b}{a^2 + b^2} \qquad Z_2 = \frac{-b'}{a'^2 + b'^2} \qquad Z_3 = +1 \qquad Z_4 = -1$$

correspondants, respectivement, aux droites d et d' et aux isotropes.

Ces quatre points ayant cote nulle, appartiennent à l'espace tridimentionnel et sont les points mêmes de cet espace qui ont ces coordonnées, Y étant, pour tous, de valeur unitaire.

D'après les formules (8) du numéro 52, on a (puisque il résulte $x_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}(a + bi)$; $x_2 = \frac{1}{a'^2 + b'^2}(a' + b'i)$; $x_3 = +i$; $x_4 = -i$) comme valeur du rapport anharmonique de ces quatre points et par conséquent (note du n° 78) des quatre droites en question :

$$\frac{i - \frac{1}{a^2 + b^2}(a + bi)}{i - \frac{1}{a'^2 + b'^2}(a' + b'i)} : \frac{-i - \frac{1}{(a^2 + b^2)}(a + bi)}{-i - \frac{1}{a'^2 + b'^2}(a' + b'i)}$$

qui, après quelques transformations faciles donne bien

$$\frac{m' - i}{m' + i} : \frac{m - i}{m + i}.$$

Cette expression du rapport anharmonique peut s'écrire comme l'on sait en exécutant les calculs

$$\frac{(mm' + 1)^2 - (m' - m)^2}{(mm' + 1)^2 + (m' - m)^2} + 2\frac{(mm' + 1)(m' - m)}{(mm' + 1)^2 + (m' - m)^2} i$$

soit, en divisant les numérateur et les dénominateurs par $(mm' + 1)^2$ et tenant compte de (a)

$$\frac{1 - \operatorname{tang}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{2 \operatorname{tang} \alpha}{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha} i = \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha = e^{2\alpha i},$$

comme il le fallait.

192. On peut de même, du moins autant qui celà est possible, étendre au cas général, l'objetivation de la propriété rappelée au numéro 79; il suffit de tenir compte des observations et des propriétés exposées plus haut.

d) Les cercles de rayon nul. Les isotropes

193. Nous terminons ce chapitre par quelques observations sur les cercles de rayon nul et sur les plans représentatifs des isotropes.

Il est d'abord évident que si, dans les formules générales, on pose $r = 0$; soit $a = b = 0$ l'équation du lieu se réduit à $Y^2 = Z^2$, $V^2 = X^2$, équations des plans ι. Nous avons vu aussi que les surfaces cotées représentatives de toutes les circonférences, ont ces plans cotés comme asymptotes (coordonnées X, Y, Z, et cotes V, communes a l'infini). S'agissant, à présent, de préciser bien cette notion, nous allons traiter le même point d'une autre façon après avoir brièvement rappelé la définition, toute analytique, du point à l'infini de certaine direction.

194. Si la solution d'un système d'équations exprimé au moyen de coordonnées homogènes x', y', z', t' (les coordonnées ordinaires x, y, z sont alors $x = \frac{x'}{t'}$, $y = \frac{y'}{t'}$, $z = \frac{z'}{t'}$) est définie par les égalités

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c} = \frac{t'}{d}$$

on en déduit

$$x = \frac{a}{d}, \qquad y = \frac{b}{d}, \qquad z = \frac{c}{d}.$$

Si d devient nul, il en résulte

$$t' = 0, \qquad \frac{x'}{a} = \frac{y'}{b} = \frac{z'}{c}.$$

Il n'y a plus, alors, de systèmes des valeurs de x, y, z, mais on dit que le système en question représente un point à « l'infini » de la direction

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \qquad (a)$$

ce fait étant justifié par les raisons données aux numéros 98 et 99, et parce que, pour de très petites valeurs de d, un point dont les coordonnées satisfont au système (a), se trouve très loin sur la droite que ce système représente.

Ceci étant rappellé, remplaçons, dans les formules (49) du n° 169 après les avoir rendues homogènes, Z par $\pm$ Y, et V par $\pm$ V, ce qui revient à chercher les intersections du lieu représenté par ces formules, avec les plans ι représentatifs des isotropes. Analytiquement cela signifie résoudre le système d'équations constitué par (49) et par $Y^2 = Z^2$, $X^2 = V^2$. On obtient sans difficulté

$$T^2 (a^2 - b^2) = 0 \qquad \therefore \qquad T = 0.$$

La solution du système des équations en question est donc

$$T = 0; \qquad \pm \frac{X}{a} = \pm \frac{Y'}{b} = \pm \frac{Z'}{b} = \pm \frac{V'}{a},$$

a et b ayant des valeurs réelles arbitraires, non nulles, d'ailleurs quelconques. D'après les définitions précédemment rappelées, elles représentent, pour les diverses valeurs de a, les points à « l'infini » des directions diverses des droites des plans cotés ι soit, pour les signes positifs, celles de l'un des plans; et celles de l'autre pour les signes négatifs (1).

195. Ceci nous porte à quelques reflexions sur la proposition enoncée couramment ainsi « Toutes les circonférences de cercles, analytiques, ont deux points communs à l'infini (les points cycliques) ». Or notre représentation met en évidence que ce n'est pas seulement deux points communs que toutes les circonférences en question ont à l'infini mais bien une infinité des points. La proposition en question semble donc tout au moins incorrecte, de même que ces autres « Toute

(1) Si l'en étend a l'espace tridimentionnel les idées et les définitions exprimées aux numéros 98 et 99 — les cotes étant mises de côté — on peut dire que $T = 0$ représente un plan « à l'infini » de l'espace, de sorte que le lieu cherché, intersection de (49) et des plans ι, est l'intersection (droite a « l'infini ») de ce plan « à l'infini » et des ι; d'où découle la même conclusion.

conique qui passe par un point cyclique passe aussi par l'autre et est alors une circonférence ». « Une circonférence, quoique courbe de deuxième degré, est déterminée par seulement trois points car elle doit déjà passer par les points cycliques. »

Examinons, par conséquent, cette question, de sorte à exprimer les faits d'une façon correcte. L'équation d'une circonférence en coordonnées homogènes, le centre étant pris pour origine, est

$$x'^2 + y'^2 = r^2 t^2.$$

Cette équation est satisfaite par les conditions

$$t = 0; \qquad \frac{y'}{\pm i} = \frac{x'}{1},$$

c'est-à-dire, d'après les définitions données, par les points à l'infini des directions $1 : \pm i$. Or, quand x ne prend que des valeurs réelles (algébriques ou vectorielles à une unité capitale) nous nous trouvons dans le cas traité dans le chapitre premier, numéros 17 et suivants (voir aussi le chap. II, n° 43), les directions $1 : \pm i$ sont celles des bissectrices des angles YOX; la question n'offre alors aucune difficulté ayant, du reste, été largement traitée au chapitre premier. Mais quand x est un diplet (nombre vectoriel à deux unités capitales) la direction $1 : i$ (de même que $1 : -i$) n'est pas unique. Elle correspond aux directions des droites du plan. En effet, si, pour préciser, nous considérons une valeur particulière x_0 de x, soit $x_0 = X_0 + Z_0 i$ à laquelle correspond la valeur particulière $y_0 = Y_0 + V_0 i$ de y, ce point definira avec l'origine une direction donc le point à l'infini remplit la condition

$$t = 0; \qquad \frac{X_0 + Z_0 i}{1} = \frac{Y_0 - V_0 i}{i}.$$

Soit, en faisant les calculs, $Y_0 = Z_0$, $X_0 = V_0$, $t = 0$, ce qui est bien la direction d'une droite des plans ι.

Considerons alors l'équation générale d'une conique en coordonnées homogènes

$$x^2 + axy + by^2 + cxt + dyt + et^2 = 0.$$

Si elle est satisfaite par la condition

$$t = 0; \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{i}$$

il faut que l'on ait $b = 0$, $c = 1$, et alors elle est aussi verifiée par la condition

$$t = 0; \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{-i};$$

et vice-versa. L'équation, prenant la forme $x^2 + y^2 + cxt + dyt + et^2 = 0$, est bien du reste, celle d'une circonférence, et comme elle n'a que trois paramètres c, d et e il suffit de trois points pour la déterminer; tandis que, en général, il en faut cinq pour déterminer le cinq paramètres a, b, c, d, e.

Voila l'exposition correcte des propositions rappelées. Maintenant, si par le fait que tous les points à l'infini par où passent nécessairement toutes des circonférences analytiques sont exprimées par seulement les deux expressions

$$t = 0; \qquad \frac{x'}{1} = \frac{y'}{\pm i}$$

on veut, pour simplifier le langage, nommer ces conditions « points cycliques » il n'y aura aucun inconvenient, mais ces expressions conventionelles ne seraient pas correctes si l'on croyait donner au mot « point » son sens ordinaire.

CICLO DE CONFERENCIAS

(1929)

FUNDACIÓN DEL OBSERVATORIO NACIONAL ARGENTINO Y SUS OBJETOS

LAS OBRAS LLEVADAS A CABO EN EL TIEMPO DE GOULD; EN LA SEGUNDA ÉPOCA DURANTE LA ADMINISTRACIÓN DE THOME; Y HASTA EL PRESENTE (1)

POR C. D. PERRINE
Director del Observatorio

RÉSUMÉ

Fondation de l'Observatoire de Córdoba. Son but. Œuvres exécutées du temps de son premier directeur et pendant l'administration des deux suivants jusqu'aujourd'hui. — L'auteur commence par émettre quelques réflexions sur le but principal d'un Observatoire astronomique : il ne faut pas, par principe, s'occuper de l'enseignement; celui-ci doit être confié aux Universités. Les Observatoires d'aujourd'hui ont, sans exception, un objet exclusivement scientifique, et il ne leur manque pas de quoi s'occuper à ce sujet; par exemple, c'est grâce à l'astronomie que l'on a découvert le gas hélium qui peut recevoir de nombreuses applications pratiques. La fondation de l'Observatoire de Córdoba répondait au but direct de confectionner un grand catalogue des positions et des éclats des étoiles australes. L'auteur donne, sur cette fondation et sur son histoire depuis son inauguration le 24 octobre 1871, de nombreux détails, exposant, en résumé, l'œuvre réalisée par le fondateur Gould, par son successeur Thome et par lui-même. Pendant la direction du premier, on confectionna l'Uranométrie Argentine; on fonda le Bureau de Météorologie qui a exécuté de magnifiques travaux; on commença le grand Catalogue d'étoiles qui comprend 145.000 observations faites avec la lunette méridienne. Ce Catalogue, et un autre, d'observations par zones, indiquent la position de 73182 étoiles. Gould commença aussi les observations photographiques des amas, etc. Son successeur, Thome, continua les observations au cercle méridien et inaugura le travail des « zones d'exploration » plus au sud de 22°. Ses travaux relatifs aux trois zones comprises entre 22° à 52°S, contiennent 489662 étoiles. Pendant cette période commencèrent les travaux astrophotographiques, employant un télescope spécial Gauthier; 6200 étoiles de repère furent observées. Sous la direction de l'auteur, les travaux qui avaient été iniciés antérieurement continuèrent : Zones d'exploration. Zones A. G. de — 22° à — 37°. Carte du Ciel de — 24° a — 31°. L'auteur en donne les détails. Les observations

(1) Conferencia, con proyecciones luminosas, dada en el local de la Sociedad, el 12 de septiembre 1929.

de la comète de Halley, faites lors de sa dernière visite, sont splendides; on a obtenu 99 gravures, les plus belles que l'on connaisse de cet astre. On a commencé aussi, des observations des éclipses du Soleil tendantes à verifier la Théorie de la Relativité.

Por dondequiera que sea usada la palabra astronomía y se estudie la ciencia, se conoce al Observatorio Astronómico de la Nación Argentina. Sus *Uranometría, Catálogo General* y *Durchmusterung (Zonas de Exploracion),* son los clásicos del cielo austral. Sus mapas de las estrellas meridionales los usan todos los astronómos que observan al sur de los — 22° de declinación. También los astrónomos del hemisferio norte usan nuestros catálogos y mapas. Todos conocen los catálogos y mapas de Córdoba como artículos caseros, aunque pocos saben que Córdoba posee una de las más antiguas universidades de las Américas.

El por qué de tan extenso conocimiento de este Observatorio, es debido al hecho de que sus obras han llenado necesidades urgentes. Si fueran necesarias pruebas de la presidencia del gran Sarmiento, su discernimiento en la fundación del Observatorio Astronómico de la Nación debiera ser suficiente. Su nombre y el de Gould, quien ha llevado a cabo los detalles de la organización, serán reconocidos en todas las épocas.

El mundo científico les debe tanto, que sólo su homenaje liquida una parte de la cuenta.

Ahora se pueden sacar dos conclusiones de estos hechos: primero, que existía una muy grande necesidad de esos catálogos y mapas; y segunda, que únicamente era posible suministrarlos a un gobierno que podía garantizar la prolongada y no molestada actividad necesaria, así como los recursos, imprescindibles, para la ejecución de obras tan grandes.

Si hubiera habido interrupciones o disipaciones de fuerzas, en la enseñanza por ejemplo, estas obras no hubieran podido ser llevadas a cabo; habrían fracasado, indudablemente, como está demostrado ampliamente por la historia.

Este es un buen ejemplo de la base correcta que debe regir la orientación de los programas de un observatorio estrictamente nacional o federal: hacer aquellas obras grandes que sean imposibles de realizar por las instituciones o las personas particulares; proseguirlas sin interrupción a una terminación pronta, asegurando así su utilidad.

Como otros astrónomos ilustres, Gould estaba enterado de tal necesidad, habiendo llamado la atención, en su discurso inaugural, sobre este particular.

Muy común es la idea de que la enseñanza debe ser practicada por los investigadores científicos, y que los investigadores más aptos son especialmente competentes en la tarea de instruir. Mientras en algunos casos esta idea es correcta, en general es errónea.

Ahora bien; es sabido que el investigador debe gozar de entera libertád en su trabajo, dejando la instrucción de los estudiantes a los profesores especialmente aptos para ello; y que únicamente aquellos alumnos que sigan carreras científicas, con aptitudes especiales, deben ser adscriptos a tales investigadores, y esto sólo en calidad de ayudantes.

Hay gran necesidad de formar a los jóvenes para las carreras científicas, pero esta formación debe ser dada por las universidades dotadas de los elementos necesarios, hasta el momento que sea necesaria la instrucción práctica, en astronomía con los telescopios grandes y los últimos detalles de los problemas del día.

Algunos de los grandes observatorios forman parte, íntegramente, de las universidades; pero, en tal caso, disponen de un departamento especial con telescopios, tránsitos, etc., para la instrucción únicamente. Tales son los observatorios de Harvard y de Lick.

El observatorio de Mt. Wilson, el más grande del mundo, y que realiza la más grande cantidad de observaciones, no está vinculado con ninguna universidad, ni tiene obligación de dar ninguna instrucción.

Todos los grandes observatorios nacionales están libres de las obligaciones de la enseñanza.

Los observatorios activos del hemisferio norte están situados, casi todos, entre las latitudes 35° y 60°. En estas latitudes, una gran parte de las estrellas australes quedan invisibles. De modo que la mayor parte de las estrellas y nebulosas australes pueden ser observadas, únicamente, desde observatorios del hemisferio sur. Como son muy escasos los observatorios meridionales, y en la época de Gould eran más escasos aún, es muy explicable la gran deficiencia de catálogos de estrellas australes.

Puede decirse que estos catálogos de las posiciones, brillos y movimientos de las estrellas forman la base de casi todas las investigaciones sobre la estructura y los movimientos de nuestro sistema o universo estelar.

Las posiciones de algunas estrellas son necesarias: para la determinación de la latitud y de la longitud; para la navegación en el océano y en el aire, y para el control de la marcha de los relojes. Sin embargo

unos pocos cientos son suficientes para estos fines, y las observaciones ya conseguidas bastarían para siglos.

Las observaciones de la actual época están destinadas, casi sin excepción, a propósitos puramente científicos.

Se pregunta frecuentemente a los astrónomos cuál es el objeto y el valor de la astronomía y de los grandes telescopios en esta época. La contestación es que tienen poco o casi ningún valor comercial, — en la época de su confección por los menos — y que el valor verdadero es la gran influencia de la ciencia sobre nuestras vidas y la civilización, probablemente la más grande de las fuerzas.

Sería un error grande no reconocer que todo conocimiento tiene siempre algún valor práctico, como por ejemplo el descubrimiento del gas helio, que ahora es de tanta importancia en el desarrollo de la navegación aérea especialmente.

Como es bien sabido, el helio fué descubierto merced a una línea extraña en el espectro del sol, en un eclipse total de hace medio siglo. Durante el siguiente cuarto de siglo este elemento hipotético, llamado helio porque fué descubierto en el sol, no fué encontrado en la tierra. Posteriormente se lo encontró en el curso de experimentos puramente científicos, también por su espectro. Una vez aislado y estudiado se descubrieron sus características y se estableció su valor para los usos en las artes.

Si no se hubiese manifestado por su espectro en el eclipse, es muy posible que el helio no hubiera sido conocido hasta hoy día.

Como ha sucedido con el helio, así puede ocurrir con cualquier otro conocimiento, nadie sabe de antemano cuándo o en qué puede ser útil. Esto justifica todo esfuerzo serio de investigación científica. Una mirada a la historia lo confirma, y demuestra que la base de nuestra civilización está efectivamente en los conocimientos que han resultado de la ciencia pura.

El descubrimiento de una nueva comida, planta o del mejor modo de cocinar, es verdaderamente un descubrimiento científico tanto como un nuevo continente o ley matemática, o elemento químico y pueden alcanzar tanto una como otra en sus consecuencias a la humanidad.

Tal es la razón verdadera y justificada para la fundación de grandes observatorios y telescopios, y la del establecimiento del Observatorio Astronómico de la Nación Argentina.

El motivo directo del establecimiento del Observatorio Astronómico de la Nación Argentina, fué el propósito de confeccionar un catálogo grande de las posiciones y brillos de las estrellas australes,

una obra de mucha urgencia, que llamó la atención del presidente Sarmiento cuando era Ministro de la Argentina ante los Estados Unidos. Gould tuvo el proyecto en detalle y la capacidad de llevarlo a cabo y Sarmiento, el buen clima de Córdoba y los recursos de la Argentina. Además, y de inolvidable importancia, Sarmiento tuvo la perspicacia de reconocer el valor de tal obra.

La elección de Córdoba fué debida, especialmente a Gilliss quien, en su viaje de regreso de Chile a Estados Unidos pasó por Córdoba y reconoció el cielo espléndido y sus otras ventajas.

No es necesario repetir aquí los detalles y las demoras encontradas en la construcción del Observatorio. Gould las ha referido, lo mismo que la preparación de la *Uranometría* durante el intervalo de organización.

Leyendo los discursos de la inauguración, me ha llamado especialmente la atención el dicernimiento y la perspicacia evidenciada por el cumplimiento de los planos y predicciones. A este respecto no es necesario recordar más que la ampliación de sus servicios, que se han sucedido especialmente en el desarrollo de los servicios meteorológicos y geográficos, hasta las grandes instituciones de hoy, bajo distintos ministerios.

Las actividades del Observatorio Astronómico Argentino (así llamado oficialmente por Sarmiento en la inauguración, el 24 de octubre de 1871) pueden ser separadas según las diferentes administraciones, 1870 a 1885 bajo Gould; 1885 a 1908 bajo Thome y el actual desde 1909.

Durante el período de construcción y especialmente debido a demoras en la llegada del círculo meridiano, Gould aprovechó el tiempo para observar las estrellas a simple vista y formar la *Uranometría Argentina,* que comprende el catálogo de 7685 estrellas y su atlas.

Esta obra fué terminada y publicada inmediatamente y enseguida tomó su propio lugar como la clásica del cielo austral.

Durante este período la Oficina Meteorológica fué establecida como un departamento del Observatorio Astronómico y continuó bajo la dirección de Gould hasta su retiro en 1885 cuando fué puesta bajo la dependencia del Ministerio de Agricultura donde sus amplias actividades la han colocado propiamente.

Las obras magníficas ejecutadas por la Oficina Meteorológica bajo la dirección de Gould y su sucesor y asistente entonces Davis, son bien conocidas por los meteorológicos del mundo entero, siendo muy estimadas.

El profesor Bigelow, quien vino a la Argentina hace algunos años desde el U. S. Weather Bureau de Wáshington, con el propósito de estudiar algunos problemas difíciles, me expresó la opinión de que la Argentina era el mejor lugar del mundo para la investigación de muchos problemas de meteorología, debido a la condición bien definida de su clima; y que las observaciones fueron de gran excelencia y exactitud; y que también fueron hechas bajo las mismas condiciones y planes durante largos intervalos.

Gould hizo muchas expediciones y determinó las posiciones geográficas de muchos puntos, especialmente las de las capitales de las provincias. También fué encargado de algunas responsabilidades relacionadas con las medidas y pesas maestras.

Una vez recibido el círculo meridiano — enviado por la conocida casa de Repsold de Hamburgo, — fué montado y Gould empezó las observaciones necesarias para el *Catálogo General,* el cual constituyó la preocupación central del nuevo Observatorio.

Fueron comenzadas estas observaciones el 9 de septiembre de 1872. Entre esa fecha y su terminación en el año 1880. Se consiguieron 145,000 observaciones que comprenden el *Catálogo General,* tomo XIV de los *Resultados del Observatorio.*

Este fué el catálogo más grande de estrellas australes de su época y hasta la reciente publicación de los extensos catálogos de zonas.

También fueron observadas por zonas otras estrellas, generalmente más débiles publicadas en los tomos VII y VIII de los *Resultados del Observatorio* y designadas zonas de Córdoba. Estos dos catálogos comprenden las posiciones de 73,182 estrellas.

Además de los trabajos del círculo meridiano, Gould, penetrándose de la importancia del nuevo arte de la fotografía para algunas investigaciones, y después de muchas dificultades — incluyendo la rotura del objetivo de ese telescopio — consiguió negativos de 38 de los cúmulos más grandes. Estas fotografías fueron obtenidas entre 1872 y 1882, y fueron de las primeras que se obtuvieron de las estrellas para tal propósito en cualquier otra parte y las primeras sacadas en el hemisferio sur, según mi enteder. Los trabajos de Gill en el Cabo comenzaron en 1882; y los de Russell en Sydney, Australia, en la misma época. La atención de Gill y de Russell, fué llamada por la circunstancia del descubrimiento de las placas «secas». Las fotografías de Gould fueron sacadas todas con placas de colodio, siguiendo un proceso mucho más difícil.

Junto con las fotografías de Rutherford de estrellas boreales, las

de Gould, de estrellas (cúmulos) australes contituyen trabajos de exploración de alta calidad.

Rutherford hizo las lentes y demostró la posibilidad del método por sus observaciones de las pléyades especialmente. Gould percibió el valor de este método y lo aplicó a las estrellas australes.

Gould no pudiendo medir las placas antes de su retiro en 1885, después de la terminación de las observaciones con el círculo, las llevó consigo. Éstas fueron medidas y discutidas bajo su dirección y los resultados publicados poco después de su fallecimiento en 1897.

Estas medidas de cúmulos australes son, sin duda alguna, la contribución más importante al problema de la determinación de los movimientos internos de estos objetos hasta la fecha.

En su debido lugar serán referidas las tentativas de aprovecharse de esta serie de valiosas observaciones.

Muchas otras observaciones y descubrimientos de importancia se hicieron, especialmente con las estrellas variables, pero en comparación con las obras mencionadas son secundarios. Esas obras constituyen un monumento no superado por ningún observatorio y alcanzado por pocos.

Estas obras han dado al Observatorio Astronómico de la Nación Argentina, su justo nombre entre los observatorios del mundo.

Es justo recordar que el doctor Gould tuvo la muy eficaz ayuda de un personal leal y trabajador y en ellos depositó su confianza. Sin tal asistencia el no hubiera podido consumar su obra grande.

Después del retiro de Gould en 1885, el Departamento Meteorológico fué puesto bajo la dirección del segundo ayudante Davis y transferido al Ministerio de Agricultura siendo el primer astrónomo, Thome, nombrado director del Observatorio Astronómico.

Las observaciones generales con el círculo meridiano fueron continuadas en una extensión del *Catálogo General* durante los años 1885 a 1890 inclusive, las cuales fueron reducidas y publicadas en 1911 como tomo XX de los *Resultados del Observatorio.*

Thome mismo inauguró, enseguida, la obra del *Durchmusterung (Zonas de Exploración)* al sur de — 22°. Ha sido ésta una parte del programa de Gould para su debida observación una vez terminado el *Catálogo General.* Como ya he hecho notar, el *Catálogo General* fué el principal objeto de Gould fundar el Observatorio.

Thome dedicó sus esfuerzos a observar al *Durchmusterung.* A la fecha de su fallecimiento, en 1908, había publicado tres tomos (XVI, XVII y XVIII de los *Resultados)* comprendiendo la zona — 22° a

— 52° y casi acabó la zona — 52° a — 62°. También publicó 12 mapas cubriendo la zona — 22° a — 42°.

En su trabajo Thome incluyó estrellas más débiles que las del *Durchmusterung* del norte, de modo que las tres zonas — 22° a — 52° contienen 489.662 estrellas.

La gran obra de la *Carte du Ciel (Catálogo y cartas Astrográficas)* hizo innecesaria la inclusión de las estrellas muy débiles en el *Durchmusterung*, y por consiguiente fueron suprimidas en las zonas recién observadas. La experiencia con los mapas demostró también la inconveniencia de tantas estrellas débiles hasta el punto de publicar una nueva edición (en 1914) suprimiendo las estrellas más débiles que 9.5 magnitud.

Se comenzaron con el círculo meridiano, en 1891, las observaciones necesarias para una extensión de los catálogos del *Astronomische Gesellschaft* al sur de la declinación — 22°; aquí terminó la serie del norte. Esa extensión abarcó la zona — 22° a — 37°. Fueron terminadas las observaciones en 1900 y los catálogos, en tres zonas de cinco grados cada una, fueron publicados después del fallecimiento del doctor Thome.

El doctor Thome inauguró algunos experimentos para observar la Vía Láctea austral con lentes especiales de gran poder y poco antes de su muerte pidió una más grande de este tipo.

En 1900 el doctor Thome fué a la reunión del comité de la *Carte du Ciel* en París. En esta reunión se encargó la zona — 24° a — 31° (centros de las placas, inclusive) al Observatorio Astronómico de la Nación Argentina.

De la casa muy conocida de Gautier de París, llegó, en 1902, el telescopio especial (llamado astrográfico, con objetivos por los hermanos Henry) e inmediatamente fué montado. Los ensayos incluyendo la medición de las placas, fueron iniciados en seguida.

Como el señor Guerin dará una conferencia sobre esta grande obra, una de las más extensas, — si no la más extensa hasta la fecha, — no es mi intención ocuparme en detalle.

El señor Guerin ha tenido una muy ardua tarea en esta obra — la observación de las 6200 estrellas de *repére*, base de las posiciones de nuestra zona. En poco menos de once meses, en 1917, hizo las 15.000 observaciones con una exactitud desconocida antes en esta clase de trabajos, no obstante su rapidez. De estas observaciones, ni una sola fué rechazada en ascensión recta y solamente una en declinación — por error al leer los microscopios — debido a la rapidez de la observación.

En cantidad, exactitud y brevedad de intervalo (rapidez) tal record nunca ha sido alcanzado según mi conocimiento.

En 1909 cuando me hice cargo del Observatorio los tres principales programas que estaban entre manos fueron los siguientes : 1° El *Durchmusterung (Zonas de Exploración);* 2° Zonas A. G., — 22° a — 37°; 3° *Carte du Ciel,* — 24° a — 31°.

Las observaciones de la cuarta zona del DM. *(Catálogo),* — 52° a — 62°, fueron casi completadas por el doctor Thome antes de su muerte, pero faltó terminar las reducciones, revisión y preparación para la imprenta. Como trabajó con la sola ayuda de su esposa, transcurrió algún intervalo antes de poder reanudar esta parte del programa, siendo los otros también urgentes. Sin embargo la zona de — 52° a — 62° fué terminada y publicada en 1914.

Se continuaron las observaciones de las otras zonas en la medida que los esfuerzos del Observatorio lo permitieron, pero solamente en el año pasado fué posible completarlos. Los mapas desde — 42° hasta el polo se encuentran listos para la distribución y el catálogo debe quedar terminado pronto.

Las 28.718 observaciones generales de 5791 estrellas con el círculo, en 1885 a 1890, fueron estudiadas, especialmente en la investigación de sus errores sistemáticos y publicadas en 1911 como tomo XX de *Resultados del Observatorio.*

Las reducciones de las observaciones de los catálogos A. G. — 22° a — 37° fueron terminadas en la fecha del fallecimiento del doctor Thome y estuvieron bajo estudio y corrección para establecer las diferencias y los errores sistemáticos debido a los varios observadores. Fueron terminados estos estudios y las zonas de — 22° a — 27° y de — 27° a 32° publicadas como tomos XXII y XXIII de los *Resultados* en 1913 y 1914 respectivamente. La distribución de la tercera zona de — 32° a — 37° fué retardada hasta 1925 por la guerra. Estos catálogos contienen 43.932 estrellas.

En las tentativas de cooperación con el Observatorio de La Plata en 1911, el Observatorio Nacional Argentino se encargó de otros 15 grados de estas zonas A. G. desde — 37° a — 52°. El Observatorio de La Plata se encargó de la zona de — 52° a — 82°. La última zona de — 82° hasta el polo sur, fué observada aquí con el doble propósito del *Durchmusterung* y las zonas A. G. Esta zona polar ha sido observada y el catálogo estará listo muy pronto.

Las observaciones de la zona de — 37° a — 52° serán comenzadas dentro de pocos meses.

De este modo el mundo astronómico quedará provisto de cuatro sistemas extensos de catálogos y mapas del cielo austral, por la República Argentina.

En 1910 se estableció un sistema de comunicaciones por cable con el hemisferio norte, de descubrimientos y noticias de importancia y de urgencia para la astronomía. Estas noticias fueron suministradas a los Observatorios de La Plata, Santiago de Chile y Río de Janeiro. De este modo el Observatorio Nacional de Córdoba ha actuado como el centro de tal servicio para una gran parte de Sud América.

Este servicio, mantenido por el Observatorio Nacional Argentino está para ampliarse a las necesidades de las nuevas actividades en el hemisferio austral.

Una buena serie de observaciones del cometa Halley se obtuvieron durante su aparicion de 1910. En la época de su gran brillantez, la cual fué durante su proximidad al Sol, el cometa estuvo mucho mejor situado para los observadores del sur que para los del hemisferio norte.

Las posiciones fueron determinadas visualmente con el refractor de 30 centímetros y micrómetro desde el 30 de noviembre de 1909, cuando estuvo al alcance de este instrumento, hasta el 3 de febrero de 1910 la fecha última después que el cometa se aproximó al Sol, pasando su perihelio el 19 de abril de 1910.

En el 17 de abril reapareció y se comenzaron las observaciones fotográficas con el telescopio astrográfico y de corto foco. Entonces fué visible a simple vista, siendo de segunda magnitud más o menos.

El tiempo era muy bueno y las fotografías fueron sacadas para posición, estructura, brillo y del espectro en nada menos que 68 noches, comenzando el 17 de abril y terminando el 10 de julio. Incluyendo las visuales, las observaciones fueron obtenidas en 132 noches desde el 30 de noviembre de 1909 hasta el 22 de agosto de 1910. Fué visto el 25 de agosto pero demasiado cerca del Sol para hacer observaciones exactas. Fué buscado en noviembre después de su conjunción con el Sol, pero no fué visible con nuestro telescopio.

En esa época el Observatorio no poseía un espectrógrafo adecuado para la observación del cometa y no fué posible conseguir uno a tiempo. Un pequeño aparato de forma cámara prismática, fué construído de partes disponibles, con él se obtuvieron algunas fotografías durante su gran brillo.

Se sacaron una serie de fotografías extra focales para la determinación de su brillo. Estas placas están bajo discusión.

Los 99 grabados del cometa están listos y se espera distribuir den-

tro de poco el tomo XXV de los *Resultados* que los contendrá así como las observaciones de posición, brillo y aspecto físico.

En 1912 ocurrió un eclipse total del Sol, cruzando el Brasil la faja de totalidad.

Cuando estuve en Berlín después de la reunión del comité de la *Carte du Ciel*, en 1911, en París, fuí consultado por el doctor Freundlich del observatorio de Berlín acerca de la posibilidad de sacar datos para las investigaciones de la nueva teoría de la *relatividad* formulada por Einstein de las fotografías tomadas durante eclipses anteriores. Esas fotografías han sido tomadas por mí en varias expediciones del Observatorio de Lick, a propósito de la investigación del problema de un planeta entre el Sol y Mercurio.

Expresé al doctor Freundlich mi opinión en contra debido a la circunstancia de que el Sol no aparece en el centro de esas fotografías, sino a la orilla de las placas.

Un nuevo examen confirmó esa opinión. Entonces el doctor Freundlich me pidió cooperación para hacer en el próximo eclipse observaciones adecuadas. De acuerdo con su deseo incluí esas observaciones en el programa para la expedición que fuí preparando para la observación del eclipse en Brasil en octubre de 1912, haciendo un grupo de telescopios especiales para el problema.

Pero debido al mal tiempo reinante (llovió cinco días consecutivos ocurriendo el eclipse en el medio) fracasaron todos los programas incluso éste.

Esta fué la primera tentativa directa de probar la nueva teoría de la relatividad por medio de observaciones astronómicas y anticipó: por casi siete años la primera afortunada tentativa de la expedición inglesa de 1919.

Los mismos telescopios fueron preparados para el eclipse de agosto de 1914 en Rusia. Como el doctor Freundlich podía ir a este eclipse, los telescopios fueron enviados a Berlín para la práctica en su uso. Pero debido a la declaración de la guerra fracasó por segunda vez esta tentativa.

En conección con estas tentativas puedo llamar la atención sobre un error de criterio muy común acerca de la eficacia de los aparatos para problemas como estos. El aparato construído para estos eclipses fué resultado de mi experiencia en cinco eclipses y de mis colegas del Observatorio de Lick en otros cuatro.

En los cuatro requisitos indispensables para tales observaciones: rigidez, exactitud en el ajuste y en el manejo, y estabilidad de foco,

la experiencia ha indicado un tipo de montaje muy satisfactorio, más todavía que los tipos pesados y fijos del Observatorio. He usado este tipo de montaje para sacar fotografías de las estrellas en los alrededores del Sol necesarias en la investigación del problema del hipotético planeta entre Mercurio y el Sol en tres eclipses con los mejores resultados. Semejantes montajes han sido utilizados recién por el Observatorio de Lick en sus investigaciones del mismo problema de la *relatividad* cuyos resultados son aceptados como los más exactos.

Sin embargo el doctor Freundlich dudó de la estabilidad del aparato nuestro, probablemente debido a la considerable cantidad de madera en la construcción, y se construyó un montaje de metal, semejante a los fijos del observatorio, de un costo considerable.

Como no fueron llevadas a cabo estas observaciones no ha sido posible dilucidar con certeza este punto, pero es mi opinión que el montaje especialmente preparado habría dado resultados tan exactos como el mucho más costoso aparato pesado de metal, y fué más estable bajo las condiciones reinante en los eclipses.

Las observaciones para el *Catálogo Astrográfico* fueron adelantadas en varios sentidos de modo que los 1360 negativos se obtuvieron al terminarse el año 1913. La instalación de un taller mecánico permitió algunos mejoramientos al telescopio. Los más importantes de éstos fueron un nuevo escape en el reloj de impulsión y un sistema más rígido para sostener el objetivo. Estas mejoras han proporcionado imágenes más perfectas de las estrellas y menos placas rechazadas.

La pronta terminación de las observaciones fué debida al gran interés que pusieron en ellas los señores Winter y Symonds a quienes se les encargó esta tarea; 1099 placas fueron tomadas por el señor Winter y 361 por el señor Symonds. Estos astrónomos merecen especial aplauso por haber terminado esta ardua tarea en tan corto período.

Las observaciones del cometa Halley, también sacadas por los señores Winter y Symonds, constituyeron una interrupción considerable en la obra astrográfica no obstante su gran importancia.

La medición de las placas para el catálogo fué acelerado por la adición de dos máquinas, dando un total de cuatro, y la adopción del sistema de anotar las medidas por la misma medidora en vez de ocupar dos, una haciendo bisecciones, la otra recordándolos.

El adelanto más importante, sin embargo, fué la introducción de escalas de gran exactitud en los microscopios — en vez de micrómetros con tornillos e hilos, — para medir las distancias de las estrellas con

referencia a las líneas de la red. Estas escalas han sido introducidas en los observatorios de Oxford y Greenwich con un éxito notable. No tienen la gran exactitud de los micrómetros, pero sí la suficiente para los fines de estos catálogos y dentro de los límites establecidos por el Comité.

Con estas escalas se ahorra también mucho tiempo en las reducciones.

La introducción de las escalas permitieron la medición de 12000 a 15000 estrellas en un año por cada medidora en vez de 3000 ó 4000 como ocurría anteriormente.

Las placas para las *Cartas Astrográficas* han sido tomadas : 579 por el señor Winter y 101 por el señor Symonds. Las cartas de la faja — 25° han sido distribuídas. El fondo de estas cartas no es perfectamente satisfactorio y se busca una mejora. Sin embargo están reproducidas todas las estrellas.

El señor Guerin dará cuenta detallada de esta gran obra y de la observación de las estrellas de *repére* en su conferencia.

Fué tanta la carencia de posiciones de las estrellas australes en general que Gould sabiamente limitó las observaciones en el círculo meridiano a esa tarea, dejando las observaciones fundamentales hasta otra época cuando hubieran sido satisfechas las mas importantes de estas necesidades.

Los catálogos de Gould y Thome llenaron esas diferencias hasta el punto de permitir empezar con un programa estrictamente fundamental. Observaciones de esta categoría fueron entonces tan necesarias como extensos catálogos al principio. Estuvo en la convicción de todos los astrónomos la necesidad de más exactas observaciones de unos pocos centenares de estrellas australes para ponerlos a la altura de trabajos semejantes del norte, se llaman éstas posiciones fundamentales y son usadas como base para otros catálogos y en muchas investigaciones teóricas como prácticas.

Probablemente esta carencia tanto como el deseo de obtener buenas posiciones de las estrellas *repére* para el *Catálogo Astrográfico* incitó al doctor Thome a pedir un círculo del último modelo el cual fué recibido después de su fallecimiento.

Tan pronto como fué posible fué montado y puesto en uso. El primer astrónomo Zimmer fué encargado del trabajo de formar un catálogo de posiciones fundamentales lo más exactas posible. Él os contará en una conferencia especial, los detalles de esta obra tan importante.

Es un gran placer decir que los resultados han excedido a nuestras esperanzas, que son los más exactos obtenidos hasta la fecha.

La reobservación de los cúmulos fotografiados por Gould ha estado bajo eetudio hace algún tiempo. Como el observatorio tiene el lente con el cual Gould sacó sus fotografías sería fácil sacar una nueva serie de placas y compararlas directamente con las originales en el estereocomparador. Un examen de las originales reveló, sin embargo, que esas han desmejorado considerablemente, desapareciendo muchas de las estrellas.

Por eso se ha proyectado obtener nuevas placas con el telescopio astrográfico, medirlas y compararlas con las medidas de Gould.

La terminación de la serie de catálogos, la cual con una sola excepción se concluirá pronto y la entrada de la fotografía, en ese campo, hace necesaria una reorganización de los programas. Queda en el ramo del círculo meridiano la necesidad y oportunidad de dedicar todos los esfuerzos a las investigaciones fundamentales. Porque con la exactitud alcanzadas son necesarias nuevas determinaciones de las constantes. También existe la necesidad de investigar los nuevos problemas señalados en el progreso de las investigaciones ya hechas.

También la terminación de esas obras permite comenzar algunas investigaciones físicas que ahora están tan retardadas como los catálogos en la época de Gould.

Las posiciones y brillos de las estrellas de los catálogos ya disponibles, proveen una base adecuada y segura para los estudios especialmente de los movimientos y estructura de nuestro sistema y fueron casi los únicos datos hasta hace un medio siglo. La placa seca y el espectrógrafo han entrado ahora en la ciencia y han contribuído poderosamente, permitiendo conocer no solamente el estado físico de las estrellas y de las nebulosas sino también sus movimientos.

En la última conferencia os daré un diseño de estos problemas y del progreso en sus soluciones.

LA CORRELACIÓN DE LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA

Y DE LAS PRECIPITACIONES CON LAS MANCHAS SOLARES

(Conclusión)

Por ALFREDO JATHO
Colegio Germania, Buenos Aires

Ejemplos típicos de las lluvias ascensionales son las precipitaciones de la zona ecuatorial. Hemos estudiado, para esta zona, las precipitaciones de la costa norte del continente sudamericano las que, como es sabido, provocan la estación lluviosa, cuando el sol culmina cerca del cenit. Examinemos primero las precipitaciones de Georgetown en la Guayana Inglesa. La época lluviosa empieza en abril (promedio mensual 6 pulgadas); pero primero en mayo las lluvias se hacen abundantes (promedio 11,1 pulgadas). Encontramos :
Georgetown (1900-1917) :

$$\text{Abr.} : r = 0{,}46, \qquad e = 0{,}102, \qquad \frac{r}{e} = 4{,}5.$$

$$\text{May.} : r = 0{,}764, \qquad e = 0{,}053, \qquad \frac{r}{e} = 14{,}4.$$

En Caracas, los promedios mensuales de las precipitaciones son : en marzo 15 milímetros, en abril 40 milímetros, en mayo 71 milímetros. Según nuestras curvas apicales la mejor correlación corresponde a abril. Encontramos :

Caracas (1897-1919) :

$$\text{Abr.} : r = 0{,}60, \qquad e = 0{,}092, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}5.$$

Trataremos más adelante de las precipitaciones de la India, que presentan en parte también ejemplos típicos de lluvias ascensionales.

b) Lluvias migratorias

Llamaremos migratorias a las lluvias que son traídas por las grandes corrientes atmosféricas, determinadas a su vez por los llamados centros de acción de la circulación atmosférica. Pertenecen por ejemplo a esta clase, las precipitaciones generales de la república, que aparecen primero en el Neuquén y en el intervalo de tres a cuatro días suelen trasladarse hasta el Paraguay y las partes confines del Brasil. Cuando las lluvias migratorias se producen sobre los continentes, serán de correlación negativa, pues sobre la superficie terrestre la circulación se estorba; mientras que, por la razón inversa, las lluvias migratorias oceánicas serán de correlación positiva.

Ejemplos. — 1° Lluvias migratorias continentales. Signo (—) : Sólo hemos examinado, para este tipo de precipitaciones, las del litoral argentino. Dudamos que para otras regiones se puedan obtener también buenas correlaciones. Las precipitaciones generales del litoral argentino presentan buenas correlaciones sólo en verano, cuando por el calentamiento del continente se rompe la faja de alta presión entre los paralelos 30° y 35° y una pulsación muy regular de siete días se propaga del centro de presión barométrico establecido sobre el Pacífico hacia el centro atlántico. En ninguna otra parte existe este mecanismo sencillo de dos grandes centros, como los que aseguran la regularidad de las precipitaciones argentinas estivales. Nos ha parecido conveniente considerar el litoral argentino como una sola entidad y expresar la correlación de sus precipitaciones por un número único. Con este fin, hemos calculado separadamente las desviaciones r de las curvas solar-pluviométricas, meses Dic. + En. + Feb., de Corrientes + Goya, Buenos Aires, Ajo General Lavalle (lat. 36°31′S, long. 56°46′W) y Bahía Blanca. Después hemos reducido estas desviaciones encontradas para los diferentes lugares, de modo que las amplitudes medias de las ondas se hacen iguales; y finalmente, hemos formado los promedios de los valores reducidos de r.

Encontramos entonces :

Litoral argentino (1884-1924) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}62, \qquad e = 0{,}064, \qquad \frac{r}{e} = 9{,}8.$$

Hemos combinado también Mar del Plata y Bahía Blanca.

Encontramos :

Mar del Plata + Bahía Blanca (1891-1925) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}53, \qquad e = 0{,}084, \qquad \frac{r}{e} = 6{,}3.$$

Separadamente :

Bahía Blanca (1866-1924) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}38, \qquad e = 0{,}075, \qquad \frac{r}{e} = 4{,}8.$$

En Córdoba, que está en la margen del litoral argentino, ya no existe la regularidad de la circulación atmosférica. Encontramos, de acuerdo con esto, un valor más pequeño para r.

Córdoba (1879-1923) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}21.$$

2° *Lluvias migratorias oceánicas.* Signo (+) :

Alto da Serra (1877-1924) (Brasil, a unos 300 km. al SW de Río de Janeiro, 800 m. de altura) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = 0{,}67, \qquad e = 0{,}055, \qquad \frac{r}{e} = 12{,}1.$$

Antananarivo (1895-1918) (Madagascar, 1400 m. de altura; las precipitaciones son traídas por vientos del SE que son más continuados en invierno) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}74, \qquad e = 0{,}061, \qquad \frac{r}{e} = 12{,}1.$$

Estaciones de Nueva Zelandia. Las precipitaciones son traídas por fuertes vientos del oeste que pertenecen al gran sistema de vientos que rodean al hemisferio sur en una ancha faja, entre los paralelos 40° y 55°; caen perpendicularmente sobre la costa occidental de Nueva Zelandia y son más regulares en invierno.
Auckland (1859-1917) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}65, \qquad e = 0{,}051, \qquad \frac{r}{e} = 12{,}7.$$

Hokitika y Christchurch. Estas dos estaciones se hallan casi en el mismo paralelo (43° S), la primera en la costa occidental en barlovento, la segunda en la costa oriental en sotavento. Las precipitaciones más regulares siempre corresponden a la costa en barlovento

(Hokitika). Faltan las observaciones para los años 1881-1893. Encontramos :

Hokitika (1868-1872) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}90, \qquad e = 0{,}045, \qquad \frac{r}{e} = 18,$$

Hokitika (1898-1919) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}52, \qquad e = 0{,}11, \qquad \frac{r}{e} = 4{,}9.$$

Christchurch (1869-1874) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}78, \qquad e = 0{,}090, \qquad \frac{r}{e} = 8{,}6,$$

Christchurch (1900-1917) :

$$\text{Jun.} + \text{Jul.} + \text{Ag.} : r = 0{,}24, \qquad e = 0{,}065, \qquad \frac{r}{e} = 3{,}7.$$

Islote de los Evangelistas (lat. 52°24′ S, long. 75°6′ W). al sur de Chile, y Punta Arenas. Las dos estaciones se hallan en la faja de los fuertes vientos del oeste. Encontramos :

Islote de los Evangelistas (1904-1924) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}57, \qquad e = 0{,}099, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}8.$$

Punta Arenas (1894-1924) :

$$\text{Dic.} + \text{En.} + \text{Feb.} : r = -0{,}75, \qquad e = 0{,}054, \qquad \frac{r}{e} = 13{,}8.$$

¿Cómo podemos explicarnos el signo negativo del coeficiente r para Islote de los Evangelistas y Punta Arenas, donde las lluvias son migratorias oceánicas? La razón, creemos, es la siguiente : Hemos trazado para ambas estacios las curvas barométricas apicales mensuales. De su comparación con las curvas de las manchas solares resulta que para los meses de verano (Nov., Dic., En., Feb.) su correlación por lo general es positiva. Las líneas isobáricas en la faja entre los paralelos 40° a 55° son muy densas y corren paralelas a los paralelos geográficos. Como la correlación de la presión barométrica con las manchas solares es positiva, las isobaras deben alejarse unas de otras. Disminuye, por lo tanto, la circulación atmosférica, por la cual los vientos serán más débiles, y, por consiguiente, las precipitaciones también disminuirán. Luego debe ser negativa para estos lugures la correlación solar pluviométrica.

3° *Las precipitaciones de la India :* Hemos visto y explicado que la correlación solar-barométrica en el océano Índico es negativa. Deducimos de ello que la circulación atmosférica allí disminuirá cuando aumenta la radiación solar, de donde resulta que para las lluvias indias, cuando son migratorias, la correlación con las manchas solares debe ser negativa. A la inversa, si encontramos en esta parte lluvias de correlación positiva, ellas deben ser ascensionales. Si este raciocinio es correcto, y creemos que lo es, las correlaciones solar-pluviométricas que encontraremos, serán aptas para arrojar nueva luz sobre las precipitaciones indias.

No podemos presentar en nuestro trabajo sino pocos ejemplos. Son tan variadas las precipitaciones indias, debido a la gran extensión del territorio y la diversidad de su aspecto fisiogeográfico, que su estudio completo haría necesario un trabajo especial, que corresponde a los meteorólogos de la India, que poseen registros completos, pues sería oportuno iniciar el intervalo para el cual se correlacionara las precipitaciones con las manchas solares, no con el 1° del mes sino con la fecha de empezar las grandes lluvias.

Estudiaremos en nuestros ejemplos las precipitaciones de mes a mes y veremos que la mejor correlación con las manchas solares corresponde cada vez al primer mes de la época lluviosa.

Ejemplos de las precipitaciones indias

Colombo (Ceylán) y Cochín (en el sur de la costa occidental de la India).

En Colombo, para la época estudiada, los promedios de las precipitaciones arrojan los siguientes valores : en marzo, 4,28 pulgadas; en abril, 9,73 pulgadas; en mayo, 10,94 pulgadas; en junio, 7,32 pulgadas. Hemos correlacionado las precipitaciones de abril y mayo que son las más abundantes.

Para Cochín los promedios mensuales de las precipitaciones son : en abril, 3,68 pulgadas; en mayo, 11,40 pulgadas; en junio, 27,79 pulgadas; en julio, 25,27 pulgadas. Hemos correlacionado las precipitaciones de mayo, junio y julio.

Las lluvias indicadas, tanto en Colombo como en Cochín, son migratorias. En Colombo son traídas por el monzón del sur, derivado del monzón del sudeste del hemisferio sur. En Cochín las precipitaciones se deben al monzón del sudoeste, reforzado en los meses

indicados por el monzón del sudeste del hemisferio sur, el que en la latitud de Cochín se ha transformado en viento del sudoeste. Encontramos :

Colombo (1876-1914) :

$$\text{Abril} : r = -0{,}59, \qquad e = 0{,}070, \qquad \frac{r}{e} = 8{,}4,$$

$$\text{Mayo} : r = -0{,}32, \qquad e = 0{,}097, \qquad \frac{r}{e} = 3{,}3.$$

Cochín (1868-1914) :

$$\text{Mayo} : r = -0{,}15,$$

Cochín (1869-1914) :

$$\text{Junio} : r = -0{,}61, \qquad e = 0{,}063, \qquad \frac{r}{e} = 9{,}7,$$

$$\text{Julio} : r = -0{,}04.$$

Hemos estudiado también las precipitaciones de Cherrapunji, que es un lugar situado a 1300 metros de altura en la pendiente sur de una cordillera y que dista unos 300 kilómetros del golfo de Bengala. Las precipitaciones en los meses estudiados son traídas por el monzón del sudoeste, encontrándose Cherrapunji en barlovento de este monzón. Las precipitaciones de Cherrapunji son de las más copiosas que se conocen (11.500 mm., promedio anual). Los promedios mensuales para la época estudiada son : en mayo, 50,85 pulgadas; en junio, 103,63 pulgadas; en julio, 107,45 pulgadas. Encontramos :

Cherrapunji (1877-1914) :

$$\text{Mayo} : r = -0{,}05,$$

$$\text{Junio} : r = -0{,}77; \qquad e = 0{,}045, \qquad \frac{r}{e} = 16{,}7,$$

$$\text{Julio} : r = -0{,}21.$$

Completamente distintos son los resultados que hemos obtenido para la costa del golfo de Bengala. Hemos estudiado las precipitaciones para la misma época, como antes. Encontramos correlaciones positivas. Recordemos que el signo positivo de la correlación indica que las lluvias correspondientes deben ser ascensionales. Allí, pues, ya no influyen los poderosos monzones del sudoeste que benefician con sus abundantes precipitaciones a la mayor parte de la India. La costa del golfo de Bengala está en sotavento de estos monzones.

En Madrás encontraremos una alta correlación negativa en mayo, lo cual indica que en este mes las precipitaciones pertenecen al tipo de las lluvias migratorias. Como el mencionado monzón del sudoeste todavía no existe en este mes, el monzón que produce estas precipitaciones debe ser del sur, transbordado del hemisferio sur. Las precipitaciones en Madrás son sumamente irregulares en mayo, de modo que el valor tan alto de la correlación más abajo indicado no es muy seguro.

Los promedios mensuales son : en Calcuta : en mayo, 5,56 pulgadas; en junio, 11,91 pulgadas; en julio, 12,70 pulgadas. En Madrás : en mayo, 1,84 pulgadas; en junio, 1,97 pulgadas; en julio, 3,84 pulgadas. Encontramos :

Calcuta (1861-1915) :

$$\text{Mayo} : r = 0{,}11.$$

Calcuta (1861-1916) :

$$\text{Junio} : r = 0{,}72, \qquad e = 0{,}044, \qquad \frac{r}{e} = 16{,}2.$$

Calcuta (1861-1914) :

$$\text{Julio} : r = -0{,}11.$$

Madrás (1867-1913) :

$$\text{Mayo} : r = -0{,}87, \qquad e = 0{,}024, \qquad \frac{r}{e} = 36.$$

Madrás (1866-1914) :

$$\text{Junio} : r = 0{,}46, \qquad e = 0{,}079, \qquad \frac{r}{e} = 5{,}8.$$

Madrás (1861-1914) :

$$\text{Julio} : r = 0{,}39.$$

Nota. — Se observará que los intervalos para los cuales hemos calculado los coeficientes para una misma estación, son un poco diferentes. La razón es que los calculamos a distintos tiempos, cuando todavía no habíamos trazado el programa definitivo de nuestro trabajo. Por lo general, hemos aprovechado los datos para todo el tiempo registrado en *World Weather Records (Smithsonian Institution,* Washington, 1927). Sólo cuando los listas empiezan antes de 1855, hemos tomado este año como límite inferior. Para las estaciones de la Argentina, del Brasil y Chile hemos podido prolongar las listas de los *Records* hasta 1930, gracias a los extractos de los registos de estos países,

los que nos fueron proporcionados, muy amablemente, por las direcciones de las oficinas meteorológicas respectivas. Debemos al director del Observatorio astronómico de La Plata, doctor J. Hartmann, los números relativos mensuales de las manchas solares desde el año 1926.

2. AMPLITUD DE LA ONDA SOLAR-PLUVIOMÉTRICA

Para los valores medios de la amplitud de la curva solar-pluviométrica, expresados en por cientos del promedio de las precipitaciones observadas, hemos encontrado los siguientes resultados :

a) Lluvias ascensionales :

	Amplitud
Mendoza, 1898-1914, meses de verano	22 %
Georgetown, 1900-1917, mayo	23
Madrás, 1866-1914, junio	25
Calcuta, 1861-1914, junio	33

b) Lluvias migratorias :

Litoral Argentino, 1884-1924, meses de verano	15
Punta Arenas, 1894-1924, meses de verano	20
Alto da Serra, 1877-1914, meses de verano	13
Antananarivo, 1895-1918, meses de invierno	25
Auckland, 1859-1917, meses de invierno	15
Cochín, 1869-1914, junio	20
Cherrapunji, 1869-1914, junio	27

De estos números parece resultar que la influencia de las variaciones de la radiación solar es algo mayor sobre las lluvias ascensionales que sobre las migratorias, lo cual sería lógico, pues sólo en las primeras la radiación solar actúa de un modo directo.

CAPÍTULO IV

Correlación de las manchas solares con la diferencia de las presiones barométricas de Santa Helena y Río de Janeiro

Las precipitaciones que se producen en un lugar dependen, sobre todo, de la diferencia de la presión barométrica en los llamados centros de acción, cuya diferencia determina la fuerza de los vientos, y por lo tanto de las precipitaciones. Los estudios relativos a esta dife-

rencia de presión son difíciles, porque la mayoría de los centros de acción se encuentran sobre los océanos. Un substituto, aunque poco perfecto, encontramos en la diferencia de la presión barométrica de Santa Helena y Río de Janeiro. Hemos reducido al nivel del mar tanto la presión barométrica en Santa Helena como en Río de Janeiro. Hemos correlacionado la diferencia de estas presiones con el número de las manchas solares. Encontramos para el intervalo 1898 a 1915, y los meses Dic. + En. + Feb., el coeficiente de correlación $r = 0{,}50$, $e = 0{,}12$, $\frac{r}{e} = 4{,}1$. Además, hemos, correlacionado para la misma época, las precipitaciones de Río de Janeiro con las diferencias de las presiones de Santa Helena y de Río de Janeiro. Encontramos $r = 0{,}42$, $e = 0{,}13$, $\frac{r}{e} = 3{,}2$. Resulta pues, que la diferencia de las presiones de Santa Helena y de Río de Janeiro está en correlacción positiva con las manchas solares; y las precipitaciones de Río de Janeiro, aunque en menor grado, con la diferencia de las presiones de Santa Helena y de Río de Janeiro. Este resultado es valioso, pues confirma la conclusión a la cual habíamos llegado antes, de que un aumento de la radiación solar intensifica la circulación general de la atmósfera. Admitiremos que es corto el intervalo para el cual hemos podido establecer las correlaciones indicadas.

Resultado general

Hemos presentado en nuestro trabajo los casos para los cuales hemos podido determinar altas correlaciones de la presión atmosférica y de las precipitaciones con las manchas solares. Son los casos, cuando el régimen meteorológico es muy sencillo, en el sentido de que depende de un factor principal que es : calma atmosférica para la presión atmosférica y las lluvias ascensionales, y vientos uniformes y fuertes para las lluvias migratorias. Pero no es el valor aislado sino el valor promediado del grupo correspondiente que se correlaciona con el número de las manchas solares.

Con esta reserva podemos deducir de nuestros resultados : que en los casos más sencillos las variaciones de la presión atmosférica y sobre todo de las precipitaciones se realizan al unísono con el número de las manchas solares.

Al terminar nuestro trabajo, agradecemos sinceramente a nuestro joven alumno Heinz Liggesmeier, quien con una perseverancia admi-

rable nos asistió en los pesados y numerosos cálculos que tuvimos que efectuar para poder escribir estas páginas.

BIBLIOGRAFÍA

Hemos consultado las siguientes publicaciones :

J. v. Hann, *Lehrbuch der Meteorologie.* (Tratado de meteorología), 3 Aufl., Leipzig, 1915.

F. H. Bigelow, *El sincronismo entre las variaciones de los fenómenos solares y los elementos meteorológicos en la Argentina y los Estados Unidos N. A.* Boletines de la Oficina Meteorológica Argentina. Boletín n° 1. Buenos Aires, 1911.

A. Defant, *Die Veränderungen in der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre in den gemässigten Breiten der Erde. (Las variaciones de la circulación general de la atmósfera en las latitudes medias de la Tierra.) Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien.* Wien, 1912.

C. G. Abbot, *Solar variation and forecasting. (Las variaciones solares y los pronósticos.) Smithsonian Miscellaneous Collections.* Washington, 1925.

H. H. Clayton, *World Weather.* New York, 1923. Además cuatro trabajos del mismo autor sobre la radiación solar y su influencia en los fenómenos meteorológicos, en *Smithsonian Miscellaneous Collections.* Washington, 1917-1930.

El método de la separación de la onda solar-meteorológica que hemos empleado en nuestro trabajo, nos fué sugerido por las publicaciones de Bigelow y Defant, arriba citadas.

ERRATAS

Página	Línea	Dice	Debe decir
231	1	curva solar-barométrica	onda solar-barométrica
233	9	tormentas estivales	tormentas eléctricas
233	11	Madagascar	Siberia, Canadá oriental, Great Basin (N. A.)

Nota. — Para la Siberia E. Septer en *Meteorol. Zeitschrift,* 1926, junio, establece, de acuerdo con nuestra hipótesis (pág. 233), un estrecho paralelismo entre las tormentas eléctricas y las manchas solares. Deducimos de sus datos $r = 0{,}95$.

COMUNICACIONES Y NOTAS CIENTÍFICAS [1]

SOBRE PRODUCTOS DE SERIES Y DE INTEGRALES DOBLES CONVERGENTES

POR EL DOCTOR J. C. VIGNAUX

1. Nos proponemos desarrollar para las series y las integrales dobles, una teoría del producto análoga al de las series simples. El reducido espacio que disponemos solo nos permite enunciar los resultados fundamentales, reservando para otro lugar el detalle de las demostraciones.

Sean dos series dobles convergentes en el sentido de Pringsheim [2],

$$U = \sum_0 \sum_0 u_{m,n} \qquad \text{y} \qquad V = \sum_0 \sum_0 v_{m,n},$$

llamaré producto de esas series, a la serie doble $W = \sum_0 \sum_0 w_{m,n}$ donde

$$\begin{aligned} w_{m,n} = {} & u_{0,0}v_{m,n} + \dots + u_{0,n}v_{m,0} \\ & + u_{1,0}v_{m-1,n} + \dots + u_{1,n}v_{m-1,0} \\ & + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ & + u_{m,0}v_{0,n} + \dots + u_{m,n}v_{0,0}. \end{aligned}$$

[1] La abundancia de material por un lado, y las dificultades financieras — que impiden aumentar el número de páginas de los *Anales* — por otra, hacen casi siempre demorar la publicación de los trabajos. Esa demora constituye un inconveniente serio cuando los artículos contienen ideas o resultados respecto de cuya prioridad interesa a los autores dejar debida constancia. Para conciliar tal interés con la demora en la publicación, hemos abierto esta nueva sección de los *Anales* en la que, sin demora, se dejará establecida la nueva idea o el nuevo resultado mientras pueda hacerse la publicación *in extenso* del trabajo en ésta u otra revista. También publicaremos en esta sección notas sueltas de carácter científico.

[2] Véase J. I. Bromwich, *Theory of Infinite series* (1928).

Teorema I. — Si las series dobles U y V *son convergentes absolutamente, la serie doble* W *es convergente absolutamente* y $W = UV$. (Análogo al teorema de Cauchy.)

Teorema II. — Si la serie doble U *es convergente* y la V *es absolutamente convergente, la serie* W *es convergente* y $W = UV$. (Teorema análogo al de Mertens.)

Teorema III. — Si las series U, V y W *son convergentes, se tiene* $W = UV$. (Análogo al de Abel.)

Teorema IV. — Si las series U y V *son convergentes* y $|mnU_{m,n}| < M$, $mnV_{m,n}| < M$ *para todo* m y n, *la serie* W *es convergente* y $W = UV$. (Análogo al 1er teorema de Hardy.)

Teorema V. — Si U y V *son convergentes* y $mnU_{mn} \to 0$, $mnV_{mn} \to 0$, *cuando* $(m, n) \to \infty$, *la serie* W *es convergente* y $W = UV$. (Análogo al 2° teorema de Hardy.)

Teorema VI. — Si la U *es absolutamente convergente y la serie* V *es oscilante con límites finitos de oscilación* V_1 y V_2 y $\lim_{m,n \to \infty} v_{m,n} = 0$, *la serie* W *es oscilante con límites* UV_1 y UV_2. (Teorema análogo al de Pringsheim.)

2. Para las integrales dobles convergentes, se puede enunciar teoremas completamente análogo a los correspondientes de las series dobles (1).

Pongamos

$$F(\mu, \nu) = \int_0^{\mu}\int_0^{\nu} f(x, y)\, dx\, dy,$$

si $\lim_{\mu,\nu \to \infty} F(\mu, \nu) = S$ *finito*, la integral $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x, y)\, dx\, dy$ diremos que es *convergente*. Si este límite no *existe*, ella es *oscilante* y

$$\overline{\lim_{\mu+\nu \to \infty}} F(\mu, \nu) = S_1 \qquad \text{y} \qquad \underline{\lim_{\mu+\nu \to \infty}} F(\mu, \nu) = S_2$$

son sus límites de oscilación.

Poniendo

$$A = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} a(x, y)\, dx\, dy; \qquad B = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} b(x, y)\, dx\, dy$$

(1) Esta teoría ha sido desarrollada para las *integrales simples convergentes* por G. Hardy, *The multiplication of conditionelly convergent series, Lond. U. S. Proc.*, 2, 6, página 410 (1908); y por el autor, para las integrales *divergentes* sumables con el método de Abel-Hardy.

y

$$C = \int_0^\infty \int_0^\infty c(x, y)\, dx\, dy,$$

donde

$$c(x, y) = \int_0^x \int_0^y a(t, z)\, b(x - t, y - t)\, dt\, dz;$$

llamaré producto de A y B, a la integral C.

Teorema I. — *Si la integral* A y B *convergen absolutamente, la integral* C *es absolutamente convergente* y $C = AB$.

Teorema II. — *Si la integral* A *converge absolutamente* y la B *es convergente,* la C *es convergente* y $C = AB$.

Teorema III. — *Si las integrales* A, B y C *son convergentes, se verifica* $C = AB$.

Teorema IV. — *Si las dos integrales* A y B *son convergentes y* $xy \,.\, a(x, y) \to 0$, $xy \,.\, b(x, y) \to 0$ *cuando* $(x, y) \to \infty$, *la* C *converge* y $C = AB$.

Teorema V. — *Si* A y B *son convergentes* y $|\, xy \,.\, a(x, y)\,| < M$, $|\, xy \,.\, b(x, y)\,| < M$ *para todo* x e y, *la* C *es convergente* y $C = AB$.

Teorema VI. — *Si* A *converge absolutamente* y B *es oscilante con límites finitos* V_1 y V_2 y $b(x, y) \to 0$ *cuando* $(x, y) \to \infty$, *la* C *es oscilante con límites de oscilación* igual a AV_1, AV_2.

Todos estos teoremas sobre producto de integrales dobles convergentes, los extendemos, a su vez, a las integrales dobles divergentes, sumables con un proceso que estudiamos en otro lugar y que es análogo al método de Hardy para los integrales simples [1].

Creo que puede tener interés investigar, si para el producto de integrales simples, se cumplen los teoremas de Vog, Cajori, Pringsheim y Landau relativos a las series simples.

Buenos Aires, noviembre 15 de 1930.

[1] H. G. Hardy, *Quarterly Journal of Mathemati,* tomo XXXV, página 22 (1903).

ALGUNOS TEOREMAS SOBRE PRODUCTO DE SERIES SUMABLES (1)

POR EL DOCTOR J. C. VIGNAUX

En un trabajo aparecido en estos *Anales* con el mismo título, al demostrar el *teorema V,* he cometido un error fácil de corregir.

Resulta, en efecto, según la hipótesis que

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_0^x e^{-x} v(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \left| -e^{-x} v(x) \right|_0^x + \overline{\lim_{x\to\infty}} \int_0^x e^{-x} v'(x)\,dy$$

$\therefore$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_0^x e^{-x} v'(x)\,dx = -v_0 + \mathrm{V}_1$$

y

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \int_0^x e^{-x} v'(x)\,dx = -v_0 + \mathrm{V}_2,$$

luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ es oscilante (B) con límites $\mathrm{V}_1 - v_0$, $\mathrm{V}_2 - v_0$.

Efectuando el producto de esta serie con la (1) y razonando como en dicho trabajo, queda demostrado el teorema en cuestión.

En un trabajo próximo a salir en el *Boletín del Seminario Matemático Argentino,* hemos logrado demostrar varios teoremas relativos al producto de series *convergentes* (B), imponiendo condiciones mucho menos restringidas que las formuladas en nuestro trabajo citado aquí. Resultado análogo se ha logrado para las series *sumables con el método de Le-Roy* de *orden p* (entregado para su publicación en las *Contribuciones* de la Universidad de La Plata). Hardy ha probado que si la serie $\sum_1 u_n$ es sumable, (B) también es la $\sum_0 u_n$, pero *no reciprocamente.* El teorema es cierto, en cambio, si a la hipótesis anterior se agrega una de las dos condiciones siguientes : $(a) \lim_{n\to\infty} u_n = 0$; $(b) \mid nu_n \mid < \mathrm{M}$ para todo n. Este nuevo teorema nos permite así, formular otros sobre producto de series sumables (B) más general que el de Borel, y el de Hardy.

Buenos Aires, marzo 1° de 1931.

(1) *Anales de la Sociedad Científica Argentina,* tomo CXI, página 41, 1931.

NOTAS VARIAS

2º Congreso Internacional de Hospitales

Será celebrado en Viena durante los días 8 al 14 de junio de 1931. El primer Congreso tuvo lugar en Atlantic City (EE. UU.), en 1929, y concurrieron 36 países. Conjuntamente se inaugurará una importante exposición internacional sobre hospitales.

La orden del día es la siguiente :

a) Asuntos : El precio costo de construcciones de hospitales; El papel de la enfermera en el hospital; La terminología hospitalaria; La legislación hospitalaria; Los servicios accesorios del hospital; El precio de hospitalización.

b) Cuestiones : Las consultas externas; La alimentación de enfermos; Los efectos del seguro contra enfermedades reflejados sobre los servicios hospitalarios; Importancia en los servicios de neurología y psiquiatría en el hospital de tipo general.

c) Conferencias : Entre los conferenciantes figuran, entre otros, los siguientes médicos, a saber : doctor Wirth (Francoforte), doctor Corwin (Nueva York), profesor von Noorden (Viena), doctor E. B. Layton (Londres), y doctor Alter (Düsseldorf).

El congreso será oficialmente inaugurado el 8 de junio en la Sala de Gala del Nuevo Palacio Imperial. Del 9 al 14 de junio, reuniones (conferencias, reportes y discusiones). Las tardes serán libres, se visitarán los hospitales e instituciones sociales del Estado y de la Capital Federal.

Además se realizarán las siguientes excursiones y diversiones, a saber : Viajes colectivos a través de Viena y sus notables suburbios; visitas a los lugares más pintorescos y de gran tradición histórica de los alrededores de Viena. Excursión en automóvil al famoso « Semmering ». Visita de los museos y galerías de Viena. Visita de representación de gala en la Ópera. Demostraciones del arte hípico en la famosa Escuela española de equitación. Viaje a Budapest, la capital de Hungría.

Para obtener condiciones y otros detalles, ocurrir a la legación de Austria, calle Ayacucho 1571.

2º Congreso Internacional de Medicina Tropical

Éste se reunirá en Amsterdam, del 12 al 17 de septiembre de 1932 con la presidencia del profesor G. Grijns.

Los temas a tratar son los siguientes : 1° Avitaminosas y especialmente Beri-beri; 2° Leptospirosas y fiebre amarilla; 3° Helmintos y, en especial, Ankylostomas. Eventualmente : 4° Paludismo, fiebre biliosa hemoglobinúrica. Enfermedades relativa a los Protozoarios de la sangre y Kala Azar. La cuota es de una £.

Fundación Montefiore

CONCURSO DE 1932

Ha sido fijado en 21.500 francos el importe del premio a otorgar en ese concurso. El último plazo para la admisión de los trabajos a someter al Jurado ha sido fijado al 30 de abril 1932. Los trabajos presentados deben encabezarse con la indicación, bien a la vista : *Travail soumis au concours de la Fondation George Montefiore, session de 1932.* Más datos en la Gerencia de la Sociedad Científica Argentina.

Miguel Lillo

(1862-1931)

En la madrugada del día 4 del corriente mes de mayo, después de sufrir estoicamente las alternativas de una cruel enfermedad, falleció en Tucumán, ciudad de su nacimiento y lugar de residencia de toda su fecunda existencia, el profesor y doctor *honoris causa* don Miguel Lillo, socio correspondiente de nuestra Sociedad y eminente naturalista. Ha terminado con él una vida extraordinaria, que ardió entera ante los más grandes cultos y que fué honra de la patria y de la ciencia; a ella se referirá en un próximo artículo, el botánico don José F. Molfino, por especial encargo de la dirección de éstos *Anales.*

BIBLIOGRAFÍA

BABINI, J., *Sobre la integración aproximada de las ecuaciones diferenciales de segundo orden.* Un folleto de 5 páginas. N. Zanichelli, Bologna.

Se trata de un extracto de las Actas del Congreso internacional de matemáticas tenido en Bolonia del 3 al 10 de septiembre de 1928.

El autor, basándose en el método de integración llamado del « radio de curvatura », que consiste en substituir los arcos de la curva integral por arcos de círculos osculadores en los puntos iniciales de los mismos, propone una mejora, consistente en tomar para el radio de curvatura, el del extremo del primer tercio del intervalo. Es el método del « primer tercio » que, con menos trabajo, da el mismo grado de aproximación que el correspondiente a las fórmulas de Runge.

ESCUELA INDUSTRIAL DE LA NACIÓN, *Cuarto suplemento al Catálogo de la Biblioteca Tecnológica.* Un folleto en 8° (17,5 × 27), in 8°, 141 páginas, Buenos Aires, 1930.

Comprende todas las obras ingresadas desde el 16 de marzo de 1929 hasta el 15 de marzo de 1930. Está firmado por el ex director ingeniero Latzina. Se trata de unas 1800 obras esmeradamente clasificadas por materias y por índice alfabético de autores.

LA MENZA, FRANCISCO, *Los sistemas de inecuaciones lineales y la división del hiperespacio.* Un folleto de 11 páginas, tirada aparte de los *Atti del Congreso Internazionale dei Matematici,* Bolonia 3-10 de septiembre de 1928.

Se trata del resumen de un trabajo hecho en el Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias de Buenos Aires y presentado al Congreso de Bolonia de 1928.

Después de observar que el estudio de los sistemas de inecuaciones lineales puede, en lenguaje matemático ficticio, ser enunciado como el de la división del hiperespacio en « hiperplanos », el autor desarrolla el tema estableciendo varias definiciones, proposiciones y propiedades.

MEMORIA ANUAL

DEL PRESIDENTE DE LA SOCIEDAD CIENTÍFICA ARGENTINA
Doctor NICOLÁS LOZANO

CORRESPONDIENTE AL QUINCUAGÉSIMO OCTAVO PERÍODO ADMINISTRATIVO
(1º DE ABRIL DE 1930 A 31 DE MARZO DE 1931)
LEÍDA EN LA ASAMBLEA DEL 15 DE ABRIL DE 1931

Señores consocios :

En cumplimiento de lo dispuesto en el artículo 19, inciso 9º del Reglamento, voy a daros cuenta del estado actual de nuestra Sociedad y de su marcha durante el 58º período administrativo (1º de abril de 1930 a 31 de marzo de 1931).

JUNTA DIRECTIVA

Integrada la Junta Directiva en la última Asamblea general ordinaria, efectuada el 10 de abril de 1930, según lo dispone el artículo 13 del Reglamento, ella quedó constituída en la siguiente forma :

Presidente : Doctor Nicolás Lozano, para completar el período de dos años.

Vicepresidente 1º : Ingeniero Nicolás Besio Moreno, elegido por el período de dos años.

Vicepresidente 2º : Ingeniero Domingo Selva, para completar el período de dos años.

Secretario de actas : Ingeniero Juan José Carabelli, elegido por el período de dos años.

Secretario de correspondencia : Profesor José F. Molfino, para completar el período de dos años.

Tesorero : Ingeniero Juan José C. Mosca, elegido por el período de dos años.

Protesorero: Doctor Jorge Magnin, para completar el período de dos años.

Bibliotecario : Doctor Reinaldo Vanossi, elegido por el período de un año.

Vocales : General ingeniero Arturo M. Lugones, doctor Juan Nielsen,

doctor Adolfo T. Williams, doctor Santiago Barabino Amadeo, elegidos por el período de dos años y doctor Frank L. Soler, ingeniero Vicente Añón Suárez, ingeniero Evaristo V. Moreno, profesor Víctor Mercante, para completar el período de dos años.

LABOR DE LA JUNTA DIRECTIVA

La labor de la Junta Directiva ha sido empeñosa, pero no siempre alcanzó los resultados perseguidos; ello se debió a las circunstancias especiales del momento en que le tocó actuar, las que no permitieron obtener los recursos que son indispensables para la instalación de la Sociedad en su nuevo edificio. Queda, pues, a la nueva Junta la tarea de arbitrar dichos recursos y, consiguientemente, la satisfacción de ver cumplido el anhelo que tantas comisiones han acariciado, de instalar a la Institución en un local adecuado a su índole y cometido.

Hecha esa salvedad, que debe estimarse puramente circunstancial, la Sociedad prosiguió satisfactoriamente sus actividades, como podrá verse por la relación que se hace en la presente memoria.

Principales acuerdos tomados. — La Junta Directiva ha celebrado 23 sesiones, en las que consideró y despachó los diversos asuntos entrados. Sus acuerdos más importantes fueron los siguientes :

— Concurrir a la demostración ofrecida al doctor Roberto Lehmann-Nitsche con motivo de su jubilación de profesor de las universidades de Buenos Aires y La Plata.

— Adherirse a la Primera Reunión Nacional de Geografía, organizada por la Sociedad « Geae ».

— Adherirse a la celebración del centenario de Lamarck, auspiciado por la Sociedad Lineana del Norte de Francia.

— Celebración del aniversario social.

— Adherirse al XI Congreso Internacional de Zoología, celebrado en Padua, designándose para representar a la Sociedad al doctor Fernando Lahille.

— Contribuir con la publicación social, representada por su director doctor Claro C. Dassen, a la constitución de la Sección Argentina del Congreso Internacional de la Prensa Técnica y Profesional.

— Designación de socia protectora a la señora Carmen Luisa Bernacchi de Díaz.

— Adhesión al 6° Congreso Internacional de Carreteras.

— Visita al Presidente del Gobierno Provisional de la Nación.

— Adhesión al acto de homenaje al doctor Erwin Baur organizado por la Facultad de Agronomía y Veterinaria.

— Designación de los siguientes socios correspondientes : doctor Erwin Baur, profesor Jacobo Hadamard y doctor Leucastre Pereira d'Andrade.

— Adhesión a la celebración del 4° centenario del Colegio de Francia, nombrando delegados a los socios correspondientes doctor Pablo Langevin y profesor Jacobo Hadamard.

ASAMBLEA

Durante el período que acaba de terminar, la Sociedad sólo ha efectuado la Asamblea general ordinaria que tuvo lugar el 10 de abril del año pasado. En ella fué leída y aprobada la memoria anual e integrada la Junta Directiva en la forma actual.

ANIVERSARIO SOCIAL

La Junta Directiva ha creído oportuno festejar el aniversario de la fundación de esta vieja cuanto prestigiosa casa, a la que tanto debe el adelanto científico del país. Así fué que al cumplir sus 58 años de existencia, celebró con un acto cultural y artístico la subida del nuevo escalón, epilogándolo con una comida a manera de comunión fraternal.

La parte cultural de este acto conmemorativo comprendió una exposición circunstancial hecha por el que os habla y la disertación del doctor Ángel Cabrera sobre Lamarck, de que se hará mérito más adelante.

El cuarteto de cuerdas « Pro Arte », que integran los señores N. Kranz, H. Ettlinger, E. Newbery y nuestro consocio el ingeniero Jorge W. Dobranich, tuvo a su cargo la ejecución de la parte artística.

La celebración tuvo lugar en los salones del Club Universitario, y de ella han quedado muy gratas impresiones.

NUEVO EDIFICIO SOCIAL

Hasta finalizar el año 1930 se mantuvo la situación de las obras del nuevo edificio en el estado en que se encontraban al terminar el anterior período social. Pero en los últimos meses y a raíz de haberse resuelto continuar los trabajos por vía administrativa, la Dirección General de Arquitectura consiguió dar algún impulso a la prosecución de los trabajos, circunstancia que determinó a la Sociedad a gestionar se dejara en condiciones de habilitación para principios del año corriente, a una parte de los locales por lo menos, a fin de poder comenzar a ocuparlos mientras siguiese la labor de terminación de la parte restante.

Como consecuencia púsose mano a la confección de cielo-rasos, colocación de carpinterías metálica y de madera, vidriería, terminación de algunos revoques y blanqueos. Se dió término también a la colocación de los pisos de madera excepto los parquets que han sido sacados nuevamente a licitación, en vista de que los precios cotizados sobrepasan de los recursos previstos para el renglón de que se trata, lo que obliga a optar por modelos más sencillos.

La instalación para la calefacción puede considerarse prácticamente terminada.

Actualmente se están celebrando varias licitaciones con el fin de ejecutar los embaldosados, revestimiento de las paredes de los toilettes, provisión de artefactos sanitarios, marmolería de la escalera principal, cielo-rasos y revoques de la caja de la escalera, parquets, etc.

La resolución que se adopte sobre esas licitaciones, en caso de que no se coticen precios que excedan de lo calculado, volverá a activar, seguramente, la marcha de los trabajos, para llevarlos a feliz término dentro de breves meses, en cuyo caso la Sociedad podrá en el curso del corriente año trasladar su sede al nuevo local.

CONFERENCIAS

El trabajo llevado a cabo por la Sociedad a este respecto en el período de dos años a que se refiere esta reseña, ha revestido real importancia. En la memoria del año anterior di cuentas de las interesantes disertaciones que tuvieron a su cargo los astrónomos de los observatorios nacionales de Córdoba y La Plata, y el personal técnico del Museo de La Plata y de la Dirección General de Minas, Geología e Hidrología, así como algunos de nuestros consocios. Ahora debo pasar revista a las conferencias dadas en el último ejercicio, cuyo ciclo me ha sido dado inaugurar.

En primer término debo señalar que nuestra vieja tribuna ha sido ocupada por el insigne matemático francés profesor Jacobo Hadamard, a quien con motivo de su grata visita a esta casa, la Junta Directiva ha resuelto vincularlo a la misma designándolo socio correspondiente. La disertación del profesor Hadamard versó sobre el *Alcance de la Matemática en la Mecánica Celeste*, siendo presentado por el doctor Claro C. Dassen, quien con tal motivo pronunció un conceptuoso y erudito discurso.

Los marinos, capitán de fragata Marcos A. Savón y Teodoro Caillet-Bois, nos ofrecieron interesantísimos estudios sobre las exploraciones australes.

El doctor Carl C. von Caldenius y el ingeniero Nils A. Lannefors, ambos de la Dirección General de Minas, han estudiado las glaciaciones cuaternarias en el sur de nuestro país y las posibilidades de la explotación industrial del plomo en la Argentina, respectivamente.

El doctor Ángel Cabrera, del Museo de La Plata, tuvo a su cargo la conferencia sobre Lamarck dada con ocasión del aniversario social, haciendo entonces un brillante estudio del gran naturalista francés.

Finalmente, el ingeniero Carlos Wauters, expuso un estudio técnico sobre las cataratas del Iguazú.

El orden en que se desarrollaron dichas conferencias fué el siguiente :

Mayo 8. *Doctor Francisco Javier Muniz,* por el doctor Nicolás Lozaño.

Mayo 12. *Alcance de la Matemática en la Mecánica Celeste,* por el profesor Jacobo Hadamard.

Junio 12. *Los viajes de Cook y su influencia en la geografía,* por el capitán de fragata Marcos A. Savón.

Julio 17. *El capitán Jaimes Weddell y sus exploraciones en nuestro mar austral*, por el capitán de fragata Teodoro Caillet-Bois.

Julio 24. *Las glaciaciones cuaternarias en Patagonia y Tierra del Fuego y sus relaciones con las glaciaciones en el hemisferio boreal. Un estudio geocronológico*, por el doctor Carl C. von Caldenius.

Julio 28. *Lamarck*, por el doctor Ángel Cabrera.

Agosto 14. *Perspectiva que ofrece la industria del Plomo en la Argentina*, por el ingeniero Nils A. Lannefors.

Octubre 30. *La técnica, base de la diplomacia, en las Cataratas del Iguazú*, por el ingeniero Carlos Wauters.

La sección Biología ha efectuado las siguientes reuniones científicas :

Mayo 17. Profesor doctor F. L. Soler, *Resultados de la Extirpación de las suprarrenales, con diversos anestésicos;* profesor doctor B. D. Martínez (h.), *Variaciones Hematológicas provocada por la Insulina. (Esquemas de Arneth);* doctores F. L. Soler y M. Jorg, *Contribución a la fisiología del píloro. Regulación de su apertura;* doctor A. Gascón, *Presiones intratoráxicas.*

Julio 12. Doctora Lucía Negrete, *Contribución al estudio del « Ancoché » ;* doctores H. D. Holmberg y F. L. Soler, *Corazones de Ñandú y Casoario;* doctor Alberto Gascón, *Variaciones de presión en el Pneumotórax;* doctores F. L. Soler y Carlos Soler, *Presión arterial en las aves;* doctor Licurgo Piazza Vallejo, *Asociación de las pinzas de Mohr y Hoffmann;* doctores C. D. Martínez (h.), P. N. Sívori e I. Marolda, *Acción de los tejidos del tren posterior del perro, sobre algunos hipnóticos y anestésicos;* doctor Marcos Breyter, *Relación entre el lóbulo anterior de la hipófisis y el bazo;* doctores R. Piazza Vallejo y Carlos Soler, *Las carótidas en aves argentinas.*

Agosto 23. Doctora Lucía Negrete, *Contribución al estudio del « Ancoché ». Investigaciones fitoquímicas sobre las plantas argentinas;* doctores Ramón A. Alcaraz y Orlando P. Curti, *Etiología de la Escarlatina;* doctor Orlando P. Curti, *Gastroscopía y gastrofotografía;* doctor B. D. Martínez (h.), *La modificación al procedimiento pneumográfico de Paul Bert;* doctor F. L. Soler, *Centros Adrenalínico-secretores. Nota preliminar;* doctores A. D. Holmberg y F. L. Soler, *Relación céfalo-encefálica en algunas especies de mamíferos y aves.* (Laboratorio del Jardín Zoológico Municipal.)

ANALES

El doctor Claro C. Dassen ha continuado al frente de la Dirección de los *Anales*. La publicación ha salido con toda regularidad, contando siempre con material abundante que debe esperar turno para su publicación, habiendo a veces, para impedir la aglomeración de colaboraciones, que insinuar a los autores la conveniencia de dirigirse a otras revistas. Así se evita, al menos en parte, que los trabajos salgan con retraso. Demás estará decir que el doctor Dassen consagró a su cometido la actividad y el interés de que tantas pruebas tiene dadas en el curso de su larga y meritoria actuación.

Debo señalar que desde el número de febrero la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, que venía ocupando por un convenio

con la Sociedad una parte de los *Anales* con sus publicaciones a título gratuito, abona mensualmente el importe de un pliego o sea la suma de pesos 142 moneda nacional, lo que alivia un poco la difícil situación por la que la Institución atraviesa. Sin que esto permita hacer cálculos para el futuro, pues se trata de una situación transitoria, la publicación tiene en el momento una entrada de unos 450 pesos mensuales, que cubre algo más de la tercera parte de sus gastos totales.

El último número aparecido es el perteneciente al mes de marzo o sea la entrega III del tomo CXI.

Las entregas números IV, V y VI del tomo CIX; I a VI del tomo CX y I a III del tomo CXI, que son las aparecidas en este período, contienen los siguientes trabajos :

Alberto E. Sagastume y Rafael Grinfeld, *Mecánica atómica.*

América del Pilar Rodrigo Trigo, *Sobre la anatomía de « Fissurellidae Megatrema » d'Orb. (Molusco prosobranquio diotocardio de las costas patagónicas).*

Carlos Wauters, *Centralización del servicio informativo sobre nuestra riqueza nacional en aguas. Formulario de un río.*

José S. Corti, *Nota sobre la determinación del acimut por elongaciones circulares.*

José Babini, *Sobre las sumas de Gauss.*

Lucas Kraglievich, *Darwin. Algo sobre su labor científica en nuestro país.*

Carlos Rusconi, *Evolución craneodental de la nutria (« Myocastor coypus bonariensis ») a través de un desarrollo postembrionario.*

Jacobo Hadamard, *Sobre el alcance de la Matemática en la Mecánica Celeste.*

Charles Wauters, *Études internationales et obligatoires d'hydraulique du point de vue économique.*

Guillermo Hoxmark, *Régimen pluviométrico de la República Argentina.*

Félix D. Carli, *Apuntes de geología del Chubut. Contribución a los estudios para el conocimiento del territorio argentino.*

C. C. Dassen, *Coordenadas tetracirculares y pentaesféricas. La inversión.*

Carlos Rusconi, *Una nueva especie de roedor del subgénero « Paraetenomys ».*

P. Magne de la Croix, *Les zébrures des mules créoles et leur origine.*

Lucas Kraglievich, *Un nuevo e interesante roedor de la fauna terciaria de Entre Ríos « Caviodon (Lelongia) paranensis » n. subgen. n. sp.*

Georges E. Wauters, *Aperçu sur les dispositions législatives concernant l'utilisation des forces hydrauliques en la Argentine.*

Lucas Kraglievich, *Los más grandes carpinchos actuales y fósiles de la subfamilia « Hydrochoerinae ».*

Carlos Rusconi, *Sobre un nuevo género de roedores del plioceno inferior de la Argentina.*

Egidio V. Gualano, *Méthode synthétique pour la détermination de l'azimut, de l'heure locale et de la latitude, au moyen d'une seule observation.*

C. C. Dassen, *Compilación de algunas notas relativas a geometría analítica.*

Carlos Wauters, *Del valor propio del agua y de la riqueza potencial en energía hidráulica en la Argentina.*

C. Bruch, *Nidificación de « Seeliphron figulus » (Dahlb.) D. T. y observaciones biológicas sobre esta especie.*

Carlos E. Dieulefait, *Sobre los valores medios.*

Paul Magne de la Croix, *La marche quadrupédale du chimpanzé et de l'homme.*

Franco Pastore, *Notas sobre « Triásico y Terciario en la Falda Oriental de la Sierra de Córdoba. Relaciones morfológico-tectónicas. Rocas volcánicas » del doctor Guillermo Bodenbender.*

C. Villalobos Domínguez, *Investigación sobre los espectros impuros y sus consecuencias para la teoría de los colores.*

J. C. Vignaux, *Algunos teoremas sobre productos de series sumables con el método exponencial.*

J. Sescosse, *La filosofía en la escuela.*

Lucas Kraglievich, *Sobre la presencia de toxodontes haplodontéridos en el piso araucanense de Catamarca : « Toxodontherium andinum » n. sp.*

Carlos M. Albizzati y Roberto Faura, *Datos químicos sobre « Chenopodium quinoa »* Willd.

Carlos Rusconi, *Noticias acerca de un esqueleto juvenil perteneciente a los grandes carnívoros extinguidos : « Smilodon bonaërensis ».*

Las colaboraciones aparecidas en la sección correspondiente a la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, fueron las que se detallan a continuación :

Mauricio Durrieu, *Estudios experimental y teórico de las propiedades de los materiales que componen las mezclas y de estas mismas.*

E. Herrero Ducloux, *El hierro de Sumampa y otros pseudometeoritos.*

Claro C. Dassen, *Les angles et les rotations « imaginaires ».* Troisième chapitre de géométrie analytique vectorielle.

SECRETARÍA

Los secretarios de actas y correspondencia, ingeniero Juan José Carabelli y profesor José F. Molfino, despacharon los diversos asuntos resueltos por la Junta Directiva, manteniendo al día todo lo concerniente a las respectivas secretarías, habiéndose enviado 305 notas, a las que deben agregarse 221 que fueron despachadas por la gerencia.

MOVIMIENTO DE TESORERÍA

El movimiento de socios ha sido el siguiente :

	Activos	Adherentes
En 31 de marzo de 1930	321	33
Han ingresado durante el período	32	2
Totales	353	35
Se han eliminado por diferentes causas	28	16
Quedan 31 de marzo de 1931	325	19

Han ingresado los siguientes socios :

Activos : Doctor Jorge Casares, doctor e ingeniero Eduardo María Huergo, doctor Luis Floriani, doctor Eduardo Sorrentino Diana, doctor José M. Jorge, doctor Enrique Fossa-Mancini, doctor Danilo Ramaccioni, doctor Ignacio Imaz, capitan de fragata Marcos A. Savón, doctor Adolfo Escudero, doctor Darío Juan Rojo, doctor Leonidas L. Silva, doctor Ismael C. Maroldа, doctor Pedro Nicolás Sívori, doctor Licurgo Piazza Vallejo, doctor Alberto Gascón, capitán de fragata Teodoro Caillet-Bois, doctor Manuel Moyano, señor Delfín Avila Méndez, doctor José Benjamín Ábalos, ingeniero José Tarragona.

Fueron promovidos de adherentes a activos : Doctor Juan C. Vignaux, doctor Roberto E. Vernengo, ingeniero José Isetta, doctor Carlos de Nicola, señor Francisco Basterreix, señor Atilio Balbiani, señor José S. Gandolfo.

Reingresaron en carácter de activos : Ingeniero Francisco E. Urondo, doctor Juan B. González, doctor Marcos Breyter, doctor Juan L. Celasco.

Ingresaron en calidad de socios adherentes : Señores Emilio Ángel Milesi y Teodoro Meyer.

Durante el período transcurrido fallecieron los siguientes socios activos, a los que la Junta Directiva rindió oportunamente el debido homenaje : doctor Salvador Debenedetti, doctor Narciso C. Laclau, ingeniero Manuel S. Ocampo, doctor Juan Carlos Delfino.

La Sociedad ha contado, desde su fundación, con 24 socios honorarios, habiendo fallecido de ellos los 20 primeros de la nómina total que es la siguiente : doctor Pedro Visca, doctor Mario Ísola, doctor Germán Burmeister, doctor Benjamín A. Gould, doctor R. A. Philippi, doctor Guillermo Rawson, doctor Carlos Berg, doctor Valentín Balbín, doctor Florentino Ameghino, doctor Carlos Darwin, doctor César Lombroso, ingeniero Luis A. Huergo, ingeniero Vicente Castro, doctor Juan J. J. Kyle, doctor Estanislao S. Zeballos, ingeniero Santiago E. Barabino, doctor Carlos Spegazzini, ingeniero J. Mendizábal Tamborrel, doctor Enrique Ferri, ingeniero Eduardo Huergo, doctor Eduardo L. Holmberg, doctor Walther Nernst, ingeniero Guillermo Marconi, doctor Alberto Einstein.

Los socios correspondientes son 73.

En resumen, los socios con que cuenta actualmente la Sociedad son los siguientes :

Honorarios	4
Protectora	1
Correspondientes	73
Activos	325
Adherentes	19
Protectores de la Organización Didáctica de Buenos Aires	2
Total	424

DEMOSTRACIÓN DE LA CUENTA DE GANANCIAS Y PÉRDIDAS

Debe

Amortización de la concesión Santa Fe 1145	3.108 00
Junta nacional aplicaciones científicas	186 23
Cincuentenario de la Sociedad	981 43
Gastos generales	2.579 75
Sueldos	9.660 00
Comisiones	1.376 60
Anales	7.118 77
Suma total	25.010 78

Haber

Cuotas socios	11.732 00
Subsidios	5.880 00
Intereses	584 16
Saldo (pérdida habida en el ejercicio)	6.814 62
Suma total	25.010 78

RESÚMEN DEL AÑO ECONÓMICO 1930-1931

Activo

Muebles y útiles	24.581 50
Edificio social	41.893 78
Títulos Deuda Externa de la Prov. de Buenos Aires	227 27
Cédulas argentinas (2ª serie)	3.648 00
» (18ª serie)	1.442 10
Certificados municipales (6 1/2 %)	3.290 70
Nuevo Edificio social	121.350 84
Concesión Santa Fe 1145	130.536 00
Gobierno Nacional	279.249 26
Comité VIIº Congreso Científico Americano	60 40
Biblioteca Social	156.337 66
Recibos al cobro	6.420 00
Banco de la Nación Argentina	728 19
Caja	340 18
Suma total	770.105 88

Pasivo

Capital social	750.743 94
Organización didáctica de Buenos Aires	4.499 05
Acciones Edificio social	3.710 00
Fernando A. Coni	11.152 89
Suma total	770.105 88

Buenos Aires, marzo 31 de 1931.

Juan José Carabelli. — José F. Molfino,
Secretarios.

Juan José C. Mosca,
Tesorero.

Vº Bº.

Nicolás Lozano,
Presidente.

BIBLIOTECA

En la Biblioteca se ha proseguido el trabajo de fichado y se ha iniciado la confrontación de las fichas con las obras respectivas para completar sus datos a objeto de preparar la clasificación por materias. En esta operación se ha contado con el concurso del consocio señor doctor Luis E. Ruata. En todo lo demás la Biblioteca ha seguido su desenvolvimiento normal. El señor Bibliotecario, doctor Vanossi ha continuado consagrándole su atención, siendo eficazmente secundado por el personal de la casa.

El movimiento de la Biblioteca se resume en los datos que a continuación se consignan :

Canjes nuevos

Taihoku Imperial University, Taiwan (Japón) ; *Accademia Scientifica Veneto-Treintino-Istriana,* Padova (Italia) ; *Instituto Biologico de Defesa Agricola e animal,* São Paulo (Brasil) ; *Allegheny Observatory of the University of Pittsburg,* Pittsburg (Estados Unidos) ; *The Logan Museum,* Beloit (Estados Unidos) ; *Círculo Argentino de Inventores,* (Buenos Aires) ; *University of Washington Library,* Seattle (Estados Unidos) ; *Revista de Obras Públicas* (Dirección de Obras Públicas) México, D. F. (México) ; *El Día Médico,* (Buenos Aires) ; *Academia Sinica,* Shanghai (China) ; *Geological and Prospecting Service, U. S. S. R.* Moscou, (Rusia) ; *Abhasian Scientific Society, Agricultural Section,* Suchum, U. S. S. R. (Rusia) ; *Le Bureau Central des recherches locales* (Société des relations Culturelles entre l'Union des R. S. S. et l'étranger), Moscou (Rusia) ; *Asociación de Farmacia y Química del Uruguay,* Montevideo (Uruguay) ; *Departamento de Salubridad Pública,* México, D. F. (México) ; *Butler University Department of Botany,* Indianopolis (Estados Unidos) ; *Seminario Matematico della R. Università di Padova,* Padova (Italia).

Canjes de baja

Bibliothèque de l'Université de l'état de l'Asie Centrale, Moscou (Rusia) ; *Department of Forestry.* Government Research Institute, Taihoku-Formosa (Japón) ; *Rivista Aeronautica,* Roma (Italia) ; *Instituto Científico e Industrial del Salitre,* Valparaiso (Chile) ; *Cleveland Public Library,* Cleveland (Estados Unidos).

Nueva suscripción

Soil Science, Baltimore (Estados Unidos).

Nueva donación

Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig, Braunschweig (Alemania).

La Sociedad cuenta en la actualidad con 567 canjes.

Los libros prestados a los señores socios suman 38.

Las siguientes cifras sirven para dar una idea del movimiento habido en la Biblioteca durante el pasado período :

Canjes nuevos, 17; Canjes de baja, 5; Suscripciones de revistas, 1; Donaciones, 2; Encuadernaciones, 20 vols; Libros prestados 38; Donaciones (libros y folletos), 130; Notas enviadas, 272; Notas recibidas y acuses de recibo, 417; Acuses de recibo y pedidos de revistas, enviadas, 624.

DONACIONES RECIBIDAS

La Sociedad ha sido favorecida con las importantes donaciones que se detallan a continuación :

De parte de la señora Carmen Luisa Bernacchi de Díaz, además del mausoleo de que ya se dió cuenta en el *Boletín informativo*, recibió la Sociedad un tapíz « Aubusson », un piano con artístico taburete, un valioso juego de vestíbulo, una caja de hierro, dos jarrones de mayólica y una araña.

De parte de la señora Elena Leovidis de Girondo, la biblioteca que perteneció a su finado esposo, el ex-socio ingeniero Eduardo Girondo.

Hicieron además apreciables donaciones de libros y revistas los siguientes señores : hijos del ex presidente ingeniero Santiago E. Barabino, ingeniero Jorge W. Dobranich, ingeniero Enrique de Madrid, ingeniero Eduardo Volpatti, etc.

PERSONAL ADMINISTRATIVO

Estimo oportuno y justo dejar constancia de que todo el personal administrativo ha seguido desempeñándose con el celo y contracción que ya es norma en esta casa, por cuya razón una vez más se hizo acreedor al buen concepto que invariablemente ha merecido de parte de las comisiones anteriores.

OTRAS CONSTANCIAS

Siguen depositados en custodia, en el Banco de la Nación Argentina, los títulos que a continuación se expresan :

1° Un título de la Deuda Pública Externa de la provincia de Buenos Aires, número 163.527 por valor de pesos cien oro sellado nominales ($ 100 o/s n.).

2° Tres mil setecientos pesos nominales ($ 3700) de obligaciones municipales (certificados al portador); cuatro mil pesos nominales ($ 4000) de cédulas hipotecarias argentinas, segunda serie (ley 9145) y mil quinientos pesos nominales ($ 1500) de cédulas hipotecarias argentinas, serie décima octava.

NICOLÁS LOZANO.

ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS
FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES

INVESTIGACIONES, ENSEÑANZA Y MEMORIAS

XIII

Memoria del presidente de la Academia relativa al período 20 de abril de 1929 a 18 de abril de 1931

Señores académicos :

De acuerdo con lo dispuesto por el artículo 25 de nuestros estatutos, presento a ustedes la memoria relativa al período iniciado el 20 de abril 1929 y que termina hoy. Durante él, se han celebrado 18 sesiones de las que 14 ordinarias, 3 extraordinarias y una pública. Sólo dejaron de celebrarse dos sesiones ordinarias, una por falta de quorum y la otra por resolución de los presentes, de modo que, a los efectos de la asistencia, deben tenerse en cuenta 20 reuniones.

MOVIMIENTO DE ACADÉMICOS

Durante el referido período, la Academia ha debido lamentar las sensibles pérdidas de un académico titular, el ingeniero don Julián Romero, fallecido el 17 de diciembre de 1929 y de los académicos correspondientes, el ingeniero doctor Carlos M. Morales, fallecido en Montevideo el 3 de julio de 1929, el doctor Germán von Ihering, fallecido en Büdingen el 24 de febrero de 1930 y el ingeniero Luis Luiggi fallecido en Roma el 1° de febrero 1931.

Además, por su carácter de indeclinable, la Academia ha debido aceptar, en su sesión de junio 15 de 1929, la renuncia del señor académico titular ingeniero don Juan F. Sarhy.

En esa misma sesión fueron designados, despues de cumplidos todos los requisitos exigidos por los estatutos, académicos titulares los doctores Abel Sánchez Díaz, Raúl Wernicke, Adolfo T. Williams, Teófilo Isnardi e ingenieros Eduardo Latzina y José Medina. Este último declinó el nombramiento por razones que la Academia aceptó en su sesión del 17 de agosto de 1929. Hasta ahora, sólo ha presentado su trabajo de incorporación el doctor Williams, por lo que fué incorporado en la Academia en su sesión de 28 de diciembre de 1929, mientras se realice el acto público en el que han de recibirse éste y los demás académicos electos.

En la sesión extraordinaria del 30 de abril de 1930, fué designado miembro académico correspondiente el profesor Pablo Barbarín de París, así como también se nombraron académicos honorarios a los profesores Emilio Borel y Jacobo Hadamard.

Actualmente la Academia está constituída por 18 miembros titulares en ejercicio, cuatro titulares electos no incorporados aún, cinco miembros honorarios y cuatro correspondientes,

La Academia acordó las siguientes licencias : Al doctor Cristobal M. Hicken, por razones de salud, para todas las sesiones del año 1929 desde el 15 de junio de ese año. Al ingeniero Luis J. Dellepiane, mientras desempeñara las funciones de ministro de la guerra (año 1929 hasta fines de agosto de 1930). Al doctor Horacio Damianovich, por ausentarse a Santa Fé en desempeño de una misión científica, desde el 19 de julio de 1930 hasta fin de ese año. Al presidente, ingeniero doctor Ángel Gallardo, desde el 15 de junio de 1929 hasta fin de ese año, por ausentarse al extranjero. Al ingeniero Mauricio Durrieu por todo el año 1930, por ausentarse al extranjero. Al vice-presidente doctor Enrique Herrero, desde el 16 de abril de 1930 hasta fines de ese año por igual causa.

A estos tres últimos les fué encomendada la representación de la Academia en todos los lugares y circunstancias donde ella resultase oportuna.

Mientras estuvo ausente el señor Vice-presidente, y por impedimento momentáneo del señor Presidente, presidió la Academia, de acuerdo con los estatutos y lo resuelto por la Academia en su sesión del 26 de abril de 1930, el académico ingeniero Agustín Mercau. (Presidió las sesiones del 26, y del 30 de abril y la pública del 13 de mayo de 1930).

COMUNICACIONES, CONFERENCIAS Y OTRAS ACTIVIDADES

Durante el período a que se refiere la presente memoria se han presentado las siguientes comunicaciones :

Sesión del 20 de abril de 1929 :

Sobre un sistema de ecuaciones simultáneas, por el profesor de la Universidad de París, don Pablo Barbarín, informando sobre ella el académico doctor Dassen.

Sesión del 18 de mayo de 1929 :

Investigación de la acción del helio sobre el platino, por el doctor Damianovich.

Sesión del 28 de septiembre de 1929 :

Sobre movimiento cuantificado de los átomos de mercurio y de talio, por el doctor Loyarte,

Sobre el Gymnocalycium Gibbosum (Haw) Pfeiff, por el doctor Herrero.

Sesión del 19 de octubre de 1929 :

Reflexiones sobre algunas antinomias, por el doctor Dassen.

Sesión del 28 de diciembre de 1929 :

Curvas Apolonianas, por el profesor Barbarín. Informó el doctor Dassen.

Sobre Rotación cuantificada de los átomos de mercurio y de talio, últimas investigaciones, por el doctor Loyarte.

Sesión del 21 de junio de 1930.

Sobre algunas antinomias (continuación), por el doctor Dassen.

Además, presentado por el ingeniero Besio Moreno, el señor ingeniero Juan A. Briano hizo, en la sesión del 30 de julio de 1929, una exposición de sus estudios sobre *Acceso ferroviario y de tráfico público al puerto de la capital.* Y presentado por el doctor Damianovich, el señor profesor don Cándido Villalobos Domínguez, expuso en la sesión de la academia del 28 de diciembre de 1929, el resultado de sus estudios sobre *Los espectros impuros y sus consecuencias en la teoría de los colores.*

En la sesión del 15 de junio de 1929, informó a la Academia la ex Comisón Nacional honoraria, para el estudio de las Mareas Patagónicas. Puso de manifiesto la labor realizada y el resultado halagüeño de la misma. Hizo entrega de unos 1500 ejemplares, de dos tomos cada uno, que contienen, publicada, toda esa labor. Hizo también entrega de los enseres, muebles y e instrumentos que pertenecieron a esa comisión y que deben quedar en custodia hasta tanto el Gobierno resuelva sobre su destino. La Academia aceptó hacerse cargo de estos últimos bajo inventario y repartir, con el concurso de la Sociedad Científica Argentina (sesión del 26 de abril de 1930), los ejemplares de referencia lo mismo que otros, editados por la Academia en 1917 conteniendo un trabajo del señor Galdino Negri titulado *Nueva contribución a la determinación racional de algunas funciones sísmicas.* De cada una de estas dos publicaciones se reservan 200 ejemplares repartiéndose todos los demás en el interior y exterior de la República.

Para terminar este capítulo, agregaré que la Academia fué requerida por el Ministro de Hacienda. a mediados de 1929, para dar su opinión sobre un expediente relativo a la celebración de un congreso de química.

NECROLOGÍAS Y ACTOS PÚBLICOS

En sesión del 18 de mayo de 1929, el doctor Dassen dió una noticia sobre el profesor Boussinesq, recientemente fallecido. Este mismo académico, en la sesión del 20 de julio de 1929 tuvo a su cargo la noticia necrológica relativa al doctor Carlos María Morales. La noticia relativa al ingeniero Romero, fué encomendada al ingeniero Latzina en la sesión del 28 de diciembre de 1929, pero éste no ha cumplido aún con ese cometido. La noticia relativa al doctor German von Ihering quedó, desde marzo de 1930 a cargo del profesor Doello-Jurado quien aún no se ha expedido. La noticia referente al ingeniero Luiggi, fué hecha por el doctor Dassen y publicada en el número de los *Anales* del mes de marzo de 1930.

Habiendo la Academia adherido al homenaje a tributar al ingeniero Luis A. Huergo con motivo de la inauguración de un monumento levantado en esta Capital Federal esquina Pedro Mendoza y Lamadrid para perpetuar su memoria, fué encomendada al señor vicepresidente, en ejercicio de la presidencia, doctor Herrero, la representación de la Academia en el acto de la inauguración, que tuvo lugar el 3 de noviembre de 1929. Con tal motivo, el doctor Herrero pronunció, en nombre de la Academia, un notable discurso que se halla publicado en la página 472, tomo I, de los *Anales*.

En la solemne sesión pública realizada por la Academia el 18 de mayo de 1930, para recibir al nuevo académico honorario doctor Jacobo Hadamard y hacerle personalmente entrega del diploma que le acredita en tal carácter (y también el diploma del nuevo académico honorario profesor Emilio Borel para que tuviese a bien entregárselo a su regreso a París), después de la apertura del acto por el señor presidente *ad-hoc*, ingeniero Agustín Mercau, el académico doctor Dassen pronunció en idioma francés, en obsequio a la nacionalidad del profesor Hadamard, el discurso académico de recepción, el cual mereció los plácemes del señor Embajador de Francia, allí presente y de la prensa francesa que publicó íntegro ese discurso. Contestó el profesor Hadamard. Todos esos discursos, lo mismo que los demàs detalles del acto — que resultó sumamente brillante — están publicados en el número de julio de 1930 de los *Anales* de la Academia.

PREMIOS OFICIALES

De acuerdo con la reglamentación establecida por la Academia y aprobada por la Intendencia municipal de Buenos Aires, y previos los correspondientes dictámenes del Jurado, fué adjudicado el premio municipal « Eduardo L. Holmberg » en la siguiente forma :

Premio relativo al año 1928; al doctor José Yepes, por su trabajo sobre *Los edentata argentinos. Sistemática y distribución.*

Premio relativo al año 1929; al doctor Pablo Groeber, por su estudio sobre *Líneas fundamentales de la geologia del Neuquen.*

Estos premios deben próximamente entregarse en acto público.

La Academia, después de tener a la vista las nóminas de los trabajos presentados, designó los siguientes candidatos para formar parte de los Jurados encargados de adjudicar los premios nacionales a la producción científica (art. 5, inciso *d*, del decreto del Poder Ejecutivo del 13 de febrero de 1925). Año 1928 : ingeniero Mauricio Durrieu y doctor Franco Pastore. Año 1929 : doctor Pedro T. Vignau e ingeniero Nicolás Besio Moreno. Estas designaciones fueron hecha a raíz de las notas del Ministerio de justicia e Instrucción pública requiriéndolas. A principios de octubre de 1930, el ministerio hizo un nuevo requirimiento para el premio relativo al año 1929. Se confirmó la designación del doctor Pastore y, hallándose ausente en Europa el ingeniero Durrieu, se propuso en su reemplazo, al ingeniero Eduardo Latzina.

SUBSIDIO

Agotados los recursos obtenidos del ministerio de Relaciones exteriores y culto en los años 1927 y 1928 con los que se habían atendido los gastos de la Academia, ésta, durante el año 1930, ha tenido dificultades serias para sostenerse. Apesar de las diligencias y medidas tomadas para renovar el subsidio en cuestión, no fué posible conseguirlo hasta que el Gobierno Provisional de la Nación, al cual envió la Academia una nota de adhesión, acordó, a fines de 1930, un subsidio de 3000 pesos, gracias al cual podrá la Academia, por otro año más, atender a sus gastos más urgentes, y a la publicación de los *Anales*. Es de esperar se consiga finalmente hacer incluir en el Presupuesto de la Nación, una partida permanente apropiada a las necesidades de la Academia. A pesar de todas las gestiones hechas para conseguirlo en estos últimos años, no fué posible, por las razones de todos conocidas, tener éxito en esas diligencias.

ANALES DE LA ACADEMIA

De acuerdo con el convenio celebrado en la Sociedad Científica Argentina y bajo la dirección del académico doctor Dassen, han venido publicándose estos *Anales* sin interrupción, a razón de unas 16 páginas por mes en término medio, hasta mediados de 1930. En esa fecha se había publicado, en tirada aparte de 300 ejemplares con el título de *Anales de la Academia*, todo el tomo I con 500 páginas y unas 120 páginas del tomo II. Esta tirada aparte así como las tiradas sueltas para los autores de artículos inéditos (a razón de 50 ejemplares), fueron costeadas con los recursos procedentes de los primeros subsidios, otorgados en los años 1927 y 1928, y que hemos mencionado más arriba. En el mes de octubre de 1930, agotados esos recursos, fué necesario suspender la publicación, la que, sólo ha podido reanudarse en noviembre, después de obtener el nuevo recurso de 3000 pesos. A fin de recuperar el tiempo perdido y de activar la publicación del numeroso material de que se dispone, la Academia resolvió, en su sesión del 22 de noviembre de 1930, costear un pliego suplementario de 16 páginas lo que ocacionará un gasto adicional de unos 140 pesos mensuales. Pronto podrá, así, tenerse listo el tomo II, pero no obstante, si no se consiguen mayores recursos será difícil poner los *Anales* al día.

ASISTENCIA A LAS SESIONES

A todas las sesiones asistió el doctor Dassen (20 asistencias).

El doctor Vignau asistió a 17 sesiones faltando a 2 con aviso y a otra sin aviso.

El doctor Herrero Ducloux asistió a 12 sesiones faltando a las demás con licencia.

El profesor Doello-Jurado asistió a 13 sesiones faltando a las demás con aviso.

El doctor Pastore asistió a 12 sesiones faltando con aviso a una de las otras.

El ingeniero Mercau asistió 12 sesiones faltando con aviso a 3 de las restantes.

El ingeniero Besio Moreno asistió a 12 sesiones faltando a 2 de las restantes con aviso.

Los ingenieros Hermitte y Aguilar asistieron a 10 sesiones faltando con aviso a 3 de las restantes.

El ingeniero Gallardo asistió a 9 sesiones faltando a seis restantes con licencia y a cinco con aviso.

El ingeniero Durrieu asistió a 6 sesiones faltando a las restantes, cuatro con aviso y diez con licencia.

El doctor Loyarte asistió a 8 sesiones faltando a 3 de las restantes con aviso.

El doctor Damianovich asistió a 8 sesiones, de las restantes cuatro faltó previo aviso, y 5 con licencia.

El doctor Williams asistió a 6 sesiones faltando a cuatro restantes sin aviso y en las otras por no haber sido aún incorporado.

El doctor Sordelli asistió a 4 sesiones.

El ingeniero Dellepiane asistió a una sesión faltando a las demás una previo aviso, otra sin aviso y a las restantes con licencia.

El ingeniero Sarhy no asistió a ninguna sesión, faltando a dos con aviso, a otra sin aviso, y a las restantes por haber renunciado.

Los doctores Hicken y Holmberg no asistieron a ninguna sesión.

Habiendo sido invitados los señores académicos electos a asistir a algunas sesiones en que eran presentadas comunicaciones, asistieron: a la del 28 de julio y del 28 de septiembre de 1929 el doctor Williams; y a las del 28 de diciembre de 1929 los señores Latzina y Sánchez Diaz.

A. Gallardo.

C. C. Dassen.

RECEPCIONES Y DISTINCIONES

Recepción pública de los doctores Pablo Langevin y Federico Enriques el 25 de agosto de 1928

La Academia, en su sesión del 11 de agosto de 1928, tuvo que considerar las dos notas siguientes :

Buenos Aires, 28 de julio de 1928.

Los académicos titulares que suscriben proponen como Miembro honorario al doctor Paul Langevin, del Colegio de Francia, actualmente en esta Capital, donde dicta conferencias, por segunda vez, en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, así como en la Universidad Nacional de La Plata.

Trátase de un eminente físico, conocido en todo el mundo científico por sus notables trabajos, una lista de los cuales se acompaña, cumpliendo lo establecido por los artículos 9° y 10 de nuestros Estatutos.

Al vincular este sabio a nuestra corporación por medio del más alto título que ella puede acordar, se honrará a sí misma, realizando a la vez un acto digno del mayor encomio.

Ramón G. Loyarte. — Enrique Herrero Ducloux. — C. C. Dassen. — Agustín Mercau. — M. Doello Jurado. — N. Besio Moreno. — H. Damianovich. — Franco Pastore. — Ángel Gallardo. — Julián Romero. — E. M. Hermitte. — M. Durrieu.

Pablo Langevin nació en París el 23 de enero de 1872. Es doctor en ciencias físicas de la Universidad de París. Profesor de física general y experimental en el Colegio de Francia (cátedra que desempeñaran anteriormente Lefèvre-Gineau, Ampère, Savart, Régnault y Mascart). Director de la Escuela de física y química

industriales de París (Instituto de la Facultad de ciencias de París). Ex presidente de la Sociedad Francesa de Física. Ex presidente de la Sociedad Francesa de Química-Física. Ex presidente de la « Societé Française pour l'Avancement des Sciences ». Ex vicepresidente de la Sociedad Francesa de los Electricistas, presidente de la Sociedad Francesa de Pedagogía, etc. Miembro de la Academia Francesa de Marina. Socio de la Sociedad Real de Londres. Miembro honorario de la « Royal Institution » de Londres. Miembro extranjero de la Academia Real de los « Lincei » de Roma. Miembro extranjero de las Academias de Ciencias de Gotinga, de Rusia, de Praga, etc. Profesor honorario de la Universidad de Buenos Aires. Sucesor de H. A. Lorentz en la presidencia del Consejo Internacional de Física Solvay. Director científico del *Journal de Physique*. Su cátedra de física moderna en el Colegio de Francia, dictada desde 1902, ha formado discípulos como Marcelo Moulin, Renato Marcelin, Juan Danytz, Mauricio de Broglie, Eugenio Bloch, Luis Dunoyer, León Brillouin, Luis de Broglie, Yves Rocard, Francis Perrin, Pedro Auger, etc.

Se le debe el descubrimiento de la ionización de los gases por los rayos de Röntgen en colaboración con Juan Perrin (1916), y el de los rayos secundarios de los rayos de Röntgen (Cambridge, 1917). Ha publicado : *Investigaciones sobre los gases ionizados* (Thèse de París, 1902). *Medida de las movilidades y de los coeficientes de recombinación de los iones en los gases. Teoría de la recombinación. Descubrimiento de los gruesos iones de la atmósfera* (1904). *Teoría de la formación de las nubes. Creación de un registrador de iones de la atmósfera. Teoría de la recombinación inicial y de ionización en columnas por los rayos* α (1908). *Teoría electrónica del diamagnetismo y del paramagnetismo* (1905). *Teoría cinética de la difusión y de la movilidad de los iones en los gases* (1905). *Teoría del movimiento browniano* (1908). *Teoría de las birrefriencias eléctrica y magnética, por la orientación molecular* (1910). *Teoría cinética de la presión osmótica* (1912). *Teoría de la relatividad, de la dinámica relativista y de la inercia de la energía* (1905-1918). *Paradoja del tiempo propio* (1911). Se le debe la creación y desarrollo de la *técnica de los ultra-sonidos* (1915-1928). *Estudio experimental y teórico de la resistencia opuesta por el aire al movimiento de los proyectiles* (1915-1918). *Aplicación de la relatividad generalizada al movimiento de rotación y a la experiencia de Sagnac* (1923). *Equilibrio entre la materia y la radiación* (1926), etc.

Buenos Aires, 28 de julio de 1928.

Los académicos titulares que suscriben, proponen como miembro honorario al doctor Federico Enriques de las universidades de Bologna y de Roma, actualmente en esta Capital, donde dicta conferencias en la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, y en la de Filosofía y Letras.

Trátase de un eminente geómetra y filósofo, conocido en todo el mundo científico por sus notables trabajos — una lista, incompleta (1), de los cuales se acompaña, cumpliendo lo establecido por los artículos 9° y 10 de los Estatutos.

Al vincular a ella este sabio por medio del más alto título que puede acor-

(1) Más adelante se dará la lista completada.

dar la Academia, se honrará a sí misma realizando, a la vez, un acto digno del mayor encomio.

Ángel Gallardo. — C. C. Dassen. — E. Herrero Ducloux. — Horacio Damianovich. — M. Durrieu. — Julián Romero. — Nicolás Besio Moreno. — Ramón G. Loyarte. — Franco Pastore. — M. Doello Jurado. — Agustín Mercau. — E. M. Hermitte.

La Academia, por unanimidad de votos, designó, de acuerdo con estas propuestas, miembros honorarios a los profesores Pablo Langevin y Federico Enriques, acordándose también hacerles entrega de los diplomas en acto público, el cual fué luego — y después de una consulta con los referidos profesores, quienes aceptaron complacidos las designaciones — fijado para el 25 de agosto a las 16,30 horas. A los doctores Ramón G. Loyarte y Claro C. Dassen les fué encomendada la presentación de los nuevos académicos.

Se realizó efectivamente el citado día en el salón de grados de la Facultad de ciencias exactas, físicas y naturales de Buenos Aires, en presencia de los señores embajadores de Italia y de Francia, conde Martín L. Franklin y Jorge Clinchant, que ocupaban, respectivamente, asientos a la derecha y a la izquierda del señor presidente de la Academia, doctor ingeniero Ángel Gallardo, ministro de Relaciones exteriores y culto. El señor Embajador de Italia tenía a su derecha al doctor Langevin, al doctor Ramón G. Loyarte y al señor decano de la Facultad, ingeniero Butty. A la izquierda del señor embajador de Francia estaban ubicados el profesor Enriques y el doctor Claro C. Dassen.

Asistieron también al acto el señor presidente de la Academia de agronomía y veterinaria, doctor Francisco P. Lavalle, el ingeniero Octavio S. Pico y varios profesores de la Universidad, así como estudiantes y un público selecto.

Estaban presentes, además de los miembros de la Academia citados más arriba, los doctores Horacio Damianovich, Enrique Herrero Ducloux, Franco Pastore y los ingenieros Agustín Mercau, Julián Romero, Nicolás Besio Moreno, Enrique M. Hermitte, Mauricio Durrieu y profesor Martín Doello Jurado.

Excusaron su inasistencia el señor Rector de la Universidad doctor Ricardo Rojas, el doctor Carlos F. Melo y el señor presidente de la Academia de medicina, doctor Mariano R. Castex.

Poco después de las 16,30 horas se inició el acto con una alocución

del presidente, doctor Gallardo, quien manifestó que esa sesión especial y pública de la Academia tenía por objeto la recepción de los dos nuevos académicos honorarios, doctores Langevin y Enriques. Después de historiar brevemente el origen de la Academia y de formular algunas consideraciones sobre su situación actual, hizo presente que si bien la institución era aún muy modesta, estaba, sin embargo, en condiciones de seguir una marcha autónoma, regular y progresiva; agregó que no obstante ser los títulos que discernía tal vez por el momento de poca significación, representaban, por lo menos, una distinción, la más alta, en este caso, que podía otorgar, siendo de esperar que en lo futuro aumentaría cada vez más su significado. En cuanto a los nuevos académicos honorarios, dijo que estando su presentación a cargo de dos miembros titulares, ellos pondrían de relieve la personalidad científica de aquéllos, cuya fama, por lo demás, era bien conocida de todos. Expresó, por su parte, la honda satisfacción que experimentaba al anunciar así la incorporación de dos hombres de ciencia de tan reconocidos prestigios, y después de hacer entrega de los diplomas a los profesores Langevin y Enriques, cedió la palabra al doctor Ramón G. Loyarte.

Después de los aplausos que mereció la alocución del señor presidente, el doctor Loyarte pronunció el discurso de presentación del doctor Pablo Langevin, y dijo lo siguiente :

PALABRAS DEL DOCTOR RAMÓN G. LOYARTE

La Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales hace brillar hoy, una vez más, su ideal escudo al incorporar a su seno a un hombre que, animado por el pábulo que provenía de su corazón y de su pensamiento, ha pasado largos años esforzándose en forjar una interpretación de este misterioso universo; un hombre cuya ciencia ha rematado, a fuerza de inducciones y de deducciones, en una creencia poética : este mundo de todos los días está hecho todo de luz, luz que emiten los soles lejanos, luz condensada en forma de materia. Esa convicción que vosotros creeréis aventurada es la mejor pintura psicológica de este gran pensador.

A fuer de físico, no es Langevin de los que admiten que pueda forjarse por procedimientos exclusivamente subjetivos una concepción del mundo exterior, ni tampoco que esa concepción efluya, sin el auxilio de la fuerza lógica del espíritu, de la mera fenomenología.

Está impregnado, y no podría ser de otro modo, del idealismo que la ciencia requiere, de una fina sensibilidad filosófica aplicada a lo concreto, de una sensibilidad en actitud de captar la realidad, si definimos a ésta como una suerte de relación invariante entre la sensación — usando la palabra en un sentido asaz general, — y la voluntad.

Por eso, su pensamiento está listo siempre para remontar el vuelo, para extenderse como una brillante tela, cuya pedrería serán los hechos notorios que su espíritu palpó primero y los que su potencia inductiva descubrió después. ¿Qué de extraño tiene, pues, que este espíritu advirtiera que la materia puede ser luz?

Ese es, justamente, el espíritu científico, el verdadero espíritu filosófico, la fuerza creadora de lo ideal y de lo material. Estos hombres, estos soñadores, como Langevin, son los conductores de la humanidad, o, por lo menos, los verdaderamente capaces de conducirla; son los avatares que envía el destino...

Esbozado así, a grandes rasgos, rápidamente trazados, el hombre interior, podréis comprender todas sus manifestaciones externas.

Mientras vierte el oro de su espíritu, sea en las conversaciones, en la cátedra, en la revista o en el libro, este hombre ofrece siempre una misma actitud, que sugiere, invariablemente, al lector o al oyente, un mismo sentimiento : la de estar delante de un hombre en el cual no caben sino pensamientos verdaderos, de donde nace la serena conformidad y seguridad de sí mismo; la de un hombre para el cual la vida trasciende de los límites de la propia existencia, por lo cual se esfuerza en embellecerla para sí y todos los demás. Tal vez por esto, es a la vez tan cordial. Por eso es, también, aun cuando él no nos lo diga, por más que carezca de chauvinismo, un gran patriota. No puede ocultarlo. ¿Qué contiene, sino, su esperanza de la grandeza intelectual de la Francia del porvenir? ¿Por qué el gran cariño que siente por sus discípulos de hoy, que se agranda cuando son colegas mañana?

Ahí está la poesía de su vida, la melodía interna que define al profesor Langevin como sabio y como hombre, porque sin esa poesía hubiese dormido, quizá, como un huésped ignorado, en el fondo de su alma, el gran investigador.

Podremos ahora, tal vez, admirar la obra del profesor Langevin, que nació en París el 23 de enero de 1872, doctorándose en ciencias físicas, en la Sorbona, siendo muy joven.

Se convirtió en seguida en figura sobresalinte de los cruzados que buscaban nueva luz para penetrar más profunda y concientemente en la naturaleza, descubriendo ya en el año 1902, los rayos secunda-

rios de la luz de Röentgen. En el mismo año investiga los fenómenos de ionización de los gases y elabora una teoría de la recombinación de los iones. En 1904 descubre los grandes iones de la atmósfera y formula una teoría de las nubes creando al mismo tiempo un registrador de aquellos corpúsculos. En 1908 elabora una teoría de la recombinación inicial y de la ionización por las partículas alfa. En 1905 elabora su famosa teoría electrónica del diamagnetismo y del paramagnetismo, cuyos resultados han quedado inconmovibles al ser confirmados por las mecánicas quantistas de Bohr-Sommerfeld y por las más recientes de Heisemberg y de Schrödinger-de Broglie. En el mismo año inició sus investigaciones sobre la relatividad, las cuales se extienden hasta 1913. Campeón de la relatividad en Francia, da a la dinámica relativista una forma fascinante y descubre, independientemente de Einstein, la inercia de la energía.

Entre los años 1915 y 1928 crea y desarrolla, fundándose en las propiedades piezo-eléctricas del cuarzo, la térmica de las ondas ultrasonoras, que permiten relevar el fondo del mar, ubicar submarinos, dirigir la entrada de los navíos en los puertos en días de niebla.

Entre los años 1915 y 1918 estudió teórica y experimentalmente la resistencia del aire al movimiento de los proyectiles; y en 1926 formula una teoría sobre el equilibrio entre la materia y la radiación.

He señalado solamente los trabajos más sobresalientes, pues sus memorias originales son muy numerosas.

La teoría de los quanta de Planck, el descubrimiento de Laue de que los rayos X consisten en una ondulación electromagnética y sus consecuencias, los trabajo de Moseley, Bragg y otros, el descubrimiento de Bohr, la teoría de la relatividad, las nuevas mecánicas de Heisemberg y de Schrödinger-de Broglie, han contado desde la hora incipiente con el esfuerzo y con la claridad de su talento.

La mecánica ondulatoria, de la cual diera ayer, en La Plata, una lección maravillosa, es hija indirecta de su espíritu, ya que nació del pensamiento de uno de sus hijos espirituales más predilectos, del pensamiento de Luis de Broglie.

Los trabajos posteriores de Schrödinger son la elaboración y desarrollo de esas ideas. De entre sus discípulos, espíritus de su espíritu, débense recordar, además de de Broglie, a Marcel Moulin, René Marcelin, muerto en la guerra, Mauricio de Broglie, Eugenio Bloch, Luis Dunoyer, León Brillouin, Yves Rocard, Francis Perrin, Pedro Auger, etc.

Hemos pintado al hombre y hablado de su obra, veamos cómo ha

sido ella reconocida en su país y en el mundo entero. Testimonio irrefragable de ese reconocimiento son los cargos que ha desempeñado o desempeña y los títulos honoríficos que le han sido otorgados. Citemos algunos :

Es profesor de física general y experimental en el Colegio de Francia, cuya categoría es superior a la Sorbona y Director de la Escuela de Física y Química de Paris. Es miembro honorario de la Academia francesa de Marina y de la Sociedad Real de Londres y miembro honorario de la institución Real de la misma ciudad, miembro correspondiente de la Academia « dei Lincei » (Roma), de la de Ciencias de Göttingen, de Rusia y de Praga. Sucesor de H. A. Lorentz en la presidencia del Consejo Internacional de Física de Solvay, presidente de la Sociedad de Pedagogía de Paris ; fué presidente de la Sociedad Francesa de Física, de la de Físico-Química y de la Sociedad Francesa para el adelanto de las Ciencias, director científico del *Journal de Physique,* etc.

Su fama es, pues, mundial y antigua. Forzando el lenguaje diríamos que cuenta con los sufragios intelectuales del espacio y del tiempo. Su nombradía posee pues de los dos elementos que la hacen invariable.

Por otra parte el profesor Langevin es no sólo un filósofo de la ciencia natural sino un temperamento artístico. Cultiva, a la vez, las cualidades interiores y aquellas que permiten agradar y gozar de las cosas exteriores. Es un hombre de pensamiento profundo y de una sensibilidad delicada y cordial. Así se explica que tenga tantos admiradores y corazones amigos.

Profesor Langevin :

La Academia de Ciencias Exactas, físicas y naturales de Buenos Aires enaltece sus ya altos ideales con vuestra incorporación.

Terminados los aplausos provocados por el discurso del doctor Loyarte el profesor Langevin expresó en idioma francés, su agradecimiento, lo hizo más o menos en los siguientes términos :

Permitidme ante todo — comenzo diciendo — que os diga en cuánto estimo la distinción que me acordáis y cuánto es mi honor al ser nombrado miembro de una Academia que ha sido integrada en el pasado y que lo es en la actualidad, por miembros eminentes.

Pude apreciar el año pasado en mi rápida excursión y aprecio ahora el adelanto y el valor de vuestra labor científica. La existencia de esta Academia y el espíritu de sus estatutos, nos hablan de la importancia que tiene en vuestro hermoso país, la investigación científica

que contribuye tan considerablemente a traves de los siglos, al progreso humano.

Bien sabemos que la grandeza de un país depende, en gran parte, de la importancia que se da en él a las formas elevadas de la actividad humana y el trabajo científico en particular.

Habéis querido, al hacer ingresar extranjeros a vuestra entidad, el carácter internacional de la ciencia y favorecer la unión que ella contribuye a consolidar entre los pueblos. Acepto el honor que me dispensáis, como un homenaje rendido por vuestra Academia a los servicios que desde hace siglos presta Francia a la obra colectiva de la humanidad.

Es igualmente significativo que, en el mismo día, la Argentina celebre un acto de paz y de unión con un gran pueblo vecino, y que en París se realicen reuniones internacionales que pueden tener importantes consecuencias para la aproximación de los pueblos.

Las relaciones intelectuales serían muy poco eficaces y en extremo precarias si no se apoyaran en las relaciones amistosas de los hombres, si no se cimentaran en la amistad.

Luego de hacer otras consideraciones análogas sobre el papel preponderante que juega en el terreno científico el sentimiento de la amistad entre los hombres que se consagran a la ciencia, el profesor Langevin expresó su agrado por el hecho de que hubiesen sido incorporados a la Academia dos hombres de países diferentes al suyo con los que, dijo, mantenía desde largo tiempo una amistosa relación : Einstein, cuya obra magnífica adquiere día a día mayor importancia, y el matemático filósofo Federico Enriques con el cual tenía el honor de mantener una amistad estrecha desde veinte años atrás.

En este ambiente de colaboración intelectual, y de cordialidad humana — terminó diciendo — os agradezco profundamente la distinción que habéis conferido a mi país por intermedio de mi persona.

Estas palabras del profesor Langevin motivaron sentidas aprobaciones de la concurrencia, y acto contínuo el ingeniero doctor Dassen a cuyo cargo estaba la presentación del doctor Enriques pronunció, en francés, un discurso en el que hizo un análisis detallado de la obra de ese profesor; dada la extensión de este discurso y las numerosas notas que, en forma de notas y complementos, acompañan esa pieza, lo publicamos al final. Al terminar fué el doctor Dassen muy aplaudido del público y especialmente felicitado por el Embajador de Francia y por el Presidente de la Academia.

Inmediatamente después, el profesor Enriques agradeció la distinción conferida pronunciando en idioma italiano unas palabras con la que testimonió lo honrado que se sentía por su designación; así como también su simpatía hacia nuestro país. Manifestó que el honor recibido es la pintura que de su obra hiciese el doctor Dassen, inspirada en una benevolencia que superaba, dijo, sus méritos; más le placía creer que se ha buscado la ocasión para honrar a un italiano y así testimoniar la simpatía de este país por Italia, tan lejana y visible, que está hoy en su corazón como lo está la madre adorada en el de un joven que recibe un premio en remota tierra.

En Italia, agregó, se aprecia la joven frescura de la promisora cultura argentina que marcará en el mundo un nuevo triunfo del espíritu latino. De acá y de allá del océano, el mismo Sol saluda por la mañana el trabajo humano y los ánimos se alzan igualmente a la verdad y a la belleza. Los hombres que están unidos para un común ideal, se aman ya antes de conocerse. Platón decía que los conocimientos de las matemáticas no se aprenden, mas se recuerdan por una contemplación de las ideas que el alma ha visto en un mundo anterior. También a mí me parece — finalizó diciendo — que la amistad estrechada hoy con los colegas argentinos no es de nuevos amigos, pero sí de hombres que encontrándose se reconocen como amigos antiguos.

La concurrencia aplaudió calurosamente las palabras del doctor Enriques, y dióse, con ellas, por terminado este hermoso acto.

DISCURSO DE C. C. DASSEN

L'OEUVRE DU PROFESSEUR FEDERIGO ENRIQUES

M^r^ le Président,
MM. les Ambassadeurs,
Médames et messieurs.

Je ne saurais vraiment exprimer le sentiment confus que j'éprouve lorsque je suis en présence d'hommes de la valeur de ces deux savants que notre Académie reçoit aujourd'hui dans son sein.

Ils ne sont pas seulement des ornements de leurs pays par leur mérite; ils honorent aussi l'humanité toute entière et parent le milieu intéllectuel, quelqu'il soit, où ils se trouvent.

Tant d'excellence me charme et me trouble à la fois, ce qui fait que

je ne sois pas même tenté de dire un mot devant eux, à moins d'en être, comme en ce moment, forcé par la nécessité. Car ce n'est, en effet, que pour remplir un devoir, que je vais vous parler de monsieur Enriques — mon collègue Loyarte vous ayant déjà parlé de monsieur Langevin — mais je dois vous dire que, en m'occupant du premier, le second ne laissera pas d'être présent dans mon esprit. Du reste il est certain que, si au lieu de la science de l'un ou l'autre de ces savants, j'avais, m'en supposant capable, à célébrer la gloire d'un militaire d'une valeur équivalente, et s'il s'agissait aussi d'une étude à fond, je pourrais, sans trop exagérer, vous dire comme Bossuet, dans son éloge au prince de Condé, que je me sens à la fois accablé par la grandeur de la tâche et par son inutilité, car les exploits d'un pareil capitaine seraient connus du monde entier, je n'aurais rien à apprendre à personne; et même, en le louant, je risquerais d'encourir le reproche d'être resté au dessons de la réalité.

Mais, d'un côté, le clairon de la gloire scientifique est bien moins retentissant que celui de la gloire militaire, et puis nous n'en sommes heureusement pas dans le cas que le grand sermonnier avait a traiter. Il ne s'agit, en somme, que de donner des aperçus. Je peux donc, sans trop de danger, entreprendre cette tâche, et je le ferai d'autant plus volontiers, que c'est la philosophie mathématique qui a, justement, inspiré mes premiers éssais. Voici comment je fis connaissance de trois ouvrages de monsieur Enriques; je vous prie de m'excuser si, ce faisant, je parle de moi-même plus qu'il ne conviendrait.

Les imaginaires, l'infini, les infiniments petits, comme autant de fantômes hantaient ma tête d'étudiant, lorsque le livre de Paul du Bois Raymond sur la *Théorie générale des fonctions* inspira ma thèse doctorale sur les *Concepts fondamentaux des mathématiques*, cette thèse me valut la connaissance et l'amitié précieuse du grand et si regretté philosophe français Louis Couturat : je l'aidai ici dans sa campagne pour l'adoption d'une langue auxiliaire internationale; il m'aida, à son tour, quand je fis éditer à Paris mon *Étude sur le quantités mathematiques*. Or, de ces deux livres sortirent ensuite mes textes pour l'enseignement secondaire, le premier desquels se rapportait à la géométrie. J'y introduisis, d'une façon à peu près originale, les idées modernes et les méthodes de rigueur déjà pratiquées ailleurs, surtout en Italie. Couturat voulut bien parcourir mon livre et m'envoyer un numero de la *Revue de Métaphysique et de morale,* où quelques ouvrages, plus ou moins récents à cette époque et qui pouvaient m'intéresser, étaient annoncés et commentés. Trois de ces livres, analysés

par Couturat lui-même, étaient de Enriques. Les ayant fait venir, je pus constater que mon texte suivait exactement la méthode preconisée dans un de ces livres : *Questioni riguardanti la geometria elementare*, recueil de quatorze mémoires qui font le plus grand honneur à l'esprit philosophique et critique des géomètres italiens. Ces mémoires avaient été réunis et coordonnés par Enriques, qui avait lui-même écrit le premier *Sur l'importance scientifique et didactique des questions relatives aux principes de la géométrie :* il résume l'esprit commun à tous les collaborateurs.

Voici de quoi il s'agit, et en quoi consiste cette méthode : Il faut distinguer, dans la géométrie, les données premières et les relations qui s'en déduisent ; les démonstrations, et les définitions mêmes qui constituent la partie logique, ne portent que sur les relations. Quant aux données premières, elles seront forcément des notions indéfinissables et des propositions indémontrables. Elles ont été, en fait, empruntées a l'expérience interprétée conformément à la structure logique de notre esprit : elles sont tellement simples et générales, qu'elles s'imposent à notre imagination même, ayant été acquises à un âge où la concience réfléchie n'était pas encore éveillée; et c'est en cela que les postulats de la géométrie diffèrent de ceux de la mécanique ou de la physique en général; ces derniers n'ayant pas, comme les premiers, un caractère de nécessité, parce que les expériences auxquelles nous les devons sont bien postérieures. Et non seulement elles s'imposent à notre imagination, mais celle-ci nous fournit encore, à leur sujet, une sorte d'expérience interne qui nous dispense de faire appel à l'expérience externe, et qui s'impose, à son tour, irrésistiblement à nous. C'est en quoi consiste l'évidence géométrique intuitive, qu'il ne faut pas confondre avec l'évidence logique qui ne porte, comme nous l'avons dit, que sur les relations.

Les données premières conduisent aux postulats. S'agit-il d'un livre d'enseignement? Il faut alors concilier des exigences scientifiques avec des didactiques; présenter la géométrie sous une forme logique rigoureuse tout en s'appuyant sur l'intuition. La méthode consiste, alors, à séparer nettement la part de l'expérience de celle de la logique. On présente d'abord des observations empiriques; puis on les résume dans des postulats qui les précisent et les idéalisent. De leur ensemble, et par des raisonnements purement logiques, on tire ensuite la série de théorémes.

Mais, dans l'énonciation des données et des postulats, il y a un point de vue logique qui est satisfait si cette énonciation est complè-

te, sans exiger que ces postulats soient entièrement indépendants les uns des autres et réduits au minimum. Ces dernières conditions conviennent, sans doute, à l'élégance de l'exposition, mais elles peuvent, en revanche, résulter inconvenantes du point de vue pédagogique.

Maintenant, si l'on veut faire de la géométrie une théorie abstraite, indépendante du sens des données premières, on n'a qu'à imiter Hilbert ou Geiger : on se délivre — ou on fait comme si on se delivrait — de l'étreinte du monde sensible, on fait de *l'axiomatique,* pour le dire en un mot : on commence la géométrie en disant : « Considerons trois catégories d'objets ou d'entités, que nous nommerons *a*, *b*, *c* ». Que sont ces objets? Nous n'en savons rien et nous n'avons pas à nous en occuper. Ce sont des notions abstraites, vidées complètement de leur contenu intuitif; ils ne possèdent d'autres propriétés que celles que nous leur donnerons explicitement dans la suite. Seulement, la question ardue de la compatibilité des postulats se présentera aussitôt; et si nous voulons l'approfondir, on ne pourra la résoudre, comme l'a fait voir Poincaré dans ces objections aux logisticiens, que par le principe de l'induction complète; c'est-à-dire, en somme, que par l'intuition. Tout rendre analytique c'est tout laisser en suspens et endommager la raison elle même. Mais ceci est une autre question; elle a été, du reste, admirablement traitée par Enriques dans sa conférence au 4e Congrès international des mathématiciens de Cambridge, en 1912. Revenant à l'enseignement, voici ce que le grand mathématicien français, que je viens de rappeler à votre souvenir, disait de l'axiomatique : « C'est un système dont je pense beaucoup de bien, mais que je ne reccomenderais pas à un lycéen. Au reste, je pourrais le faire sans crainte, il ne pousserait pas la lecture bien loin... Pour le philosophe, pour le savant, une bonne définition doit s'appliquer à tous les objets définis, et seulement à eux; elle doit satisfaire aux règles de la logique, mais dans l'enseignement une bonne définition est celle qui est comprise par les élèves. » C'est une observation que l'on oublie souvent et sur laquelle je n'insistera pas car elle me ménerait trop loin, surtout si je voulais l'appliquer aux programmes actuellement en vigueur ici, ce qui serait hors de propos.

La conclusion est que, dans l'intérêt scientifique et pédagogique, on ne doit pas tout sacrifier à la rigueur logique, mais, au contraire, conserver à l'intuition la place qui lui revient. Après avoir distingué les données empiriques des déductions logiques, il faudra expliquer le rôle du raisonnement, qui consiste à transmettre, tout le long de la chaîne des déduction, l'évidence du postulat qui forme le premier

chaînon, de façon à la faire arriver au dernier. Les faits géométriques ne sont pas également évidents, mais le raisonnement logique leur donne à tous l'évidence des postulats; donc, plus ceux-ci seront évidents, et meilleurs ils seront du point de vue pédagogique.

Relativement au troisième livre de Enriques, que je n'ai pas encore mentionné, c'était ses *Lezioni di geometria projettiva;* il constitue une magistrale initiation aux principes de cette science, et il est, lui aussi, une éloquente expression du lieu prominent que les recherches scientifiques et l'enseignement mathématique avaient déjà alors acquis en Italie. Ce livre remplit, relativement a la géométrie projective, le rôle que les *Questioni* remplissent envers le domaine entier des constructions géométriques. L'enseignement de la géométrie vient ainsi à se bénéficier des conquêtes des recherches scientifiques modernes. Dans le livre qui nous occupe, la géométrie projective est exposé d'une façon à la fois très élémentaire et très rigoureuse d'après des idées de von Staud, en se dégageant de toute considération métrique et en s'inspirant, du reste, sur la méthode preconisée dans les *Questioni* pour l'enseignement de la géométrie, c'est-à-dire, que l'on n'a pas fait de la géométrie projective une science abstraite : l'intuition y joue le rôle qui lui correspond.

Enriques emploie cinq postulats *graphiques,* plus celui de la continuité, défini d'une façon entièrement ordinale, analogue à celle dont se sert Dedekind pour introduire la notion de coupure; les éléments à l'infini, nécessaires aux cinq premiers postulats, sont formulés à la manière de von Staud. La projectivité y est definie par la relation harmonique.

Dans les *Questioni,* et dans plusieurs autres ouvrages, Enriques établit, à la lumière de la psychologie physiologique, que si on recherche l'origine des notions spatiales, on leur trouve trois sources : celles qui proviennent des sensations de la vue, correspondent à la géométrie projective (alignements, perspectives, etc.); celles qui proviennent des sensations tactiles de la main, ou relatives à un organe tactile différentié muni de mobilité, correspondent à la géométrie métrique; et celles qui proviennent ou se rapportent au sens du toucher et du muscle, correspondent a la *Théorie du Continu* ou *Analysis situs.* Le postulat d'Euclide associe deux modes de représentation : l'un optique, relatif à la rencontre des parallèles; l'autre mécanique en tant que droites equidistantes ; c'est ce qui fait que ce postulat ait moins d'évidence que les autres.

Du point de vue philosophique, Enriques pense que, puisque la

géométrie à une base expérimentale, elle n'a qu'une nécessité subjective; ses propositions, de même que celles de la physique, n'ont qu'une valeur relative et approximative, elle est caracterisée par les propriétés fondamentales des corps solides vérifiables par l'expérience physique, expérience moins aisée pour le postulatum d'Euclide que pour les autres, ce qui fait que l'on peut légitimement le revoquer en doute, sans que ce doute puisse d'ailleurs modifier notre intuition subjective de l'espace euclidien.

Je tiens à signaler, en honneur de Mr Enriques, que dans l'édition italienne de la géométrie projective, les éléments nommés « imaginaires » ont été soigneusement écartés, et que s'il les nomme dans la version allemande, il n'en fait aucune théorie; et quant il reprend la question dans l'appendice, il le fait du point de vue analytique comme il correspond puisque ce n'est que dans ce terrain que les éléments en question s'introduisent d'une façon naturelle.

Avant ce livre sur la géometrie projective, Enriques avait déjà publié, en 1894, ses *Conferenze di geometrie,* cours autographié. Plus tard parurent, en 1902, ses *Lezioni di geometria descrittiva,* où on rencontre la notion de ligne comme fondamentale, sans chercher à la définir.

La deuxième édition des *Questioni* est de 1912, douze ans après la première, qui, du reste, avait déjà été amplifiée dans l'édition allemande; elle comprend deux tomes et embrasse maintenant toutes les mathématiques. On sait que quelques problèmes de mathématiques élémentaires, comme la quadrature de cercle, etc., n'ont pu être resolus que grâce aux théories des plus élevées et très récentes de l'algèbre et de l'analyse : par la théorie des équations algébriques, la notion de corps de nombre, la classification des nombres, etc. Il y a aussi quelques autres notions à considérer, et la nouvelle édition se propose d'élucider tout cela; ce livre étant destiné à élever l'esprit philosophique de ceux qui enseignent les mathématiques et de leur donner une vision plus large des doctrines et du progrès de la science. Le premier volume de cette seconde édition a pour titre *Critica dei principii,* on y trouve un chapitre nouveau, écrit par Enriques, *Sur le nombres réels.* Dans le deuxième volume, trois articles sont aussi de lui : l'un sur *Les équations résolubles par radicaux* carrés et sur les polynomes réguliers que l'on peut construire élémentairement. L'autre *Sur quelques observations générales relatives aux problèmes de géométrie;* et le troisième *Sur les maximuns et minimuns dans l'analyse moderne.* Dans ce dernier article, Enriques nous donne, en peu de pages, un aperçu des méthodes les plus récentes du *Calcul des variations,* en

nous montrant de quelle manière les investigations théoriques sur les ensembles de fonctions ont renouvelé ce calcul. Ainsi que l'a fait observer Samuel Lattès, Enriques atteint ainsi le but qu'il s'était proposé en publiant cet ouvrage; c'est-à-dire, démontrer qu'il faut se placer à un point de vue plus élevé et plus général que celui que comporte l'énoncé d'un problème, si l'on veut en obtenir une solution exempte de certaines critiques que ces problèmes soulevent quelques fois; par exemple, dans les cas des géodésiques et des isopérimètres qui se rattachent, à la fois, à la mathématique élémentaire et aux théories les plus élevées de la science.

Finalement, la troisième édition, de 1924-1926, comprend trois volumes d'un total de plus de 1500 pages; soit 23 mémoires dont cinq de Enriques. Le premier de ces cinq, relatif à la génèse et au développement des idées qui ont conduit aux éléments d'Euclide; et le 12e sur *L'espace et le temps devant la critique moderne,* sont à signaler.

Je me suis un peu étendu sur ce livre à cause de sa portée philosophique, scientifique et pédagogique; mais l'œuvre de Enriques est tellement inmense que si je devais tant soi peu la détailler, il me faudrait des heures et des heures. Je dois donc abréger et même, relativement aux mémoires publiés dans les revues, il me faudra les signaler en bloc.

Dans son livre *Problemi della scienza,* qui a eu aussi plus d'une édition et a été traduit en français et en allemand, Enriques fait, entre autres, une analyse de ce qui forme le réel considéré sous les deux points de vue : le vulgaire et le scientifique; cette analyse s'étend à une critique des faits et des théories; où il tâche de distinguer ce qui, dans la science, constitue son contenu positif, et ce qui forme son aspect subjectif. L'auteur étudie les problèmes qui se rapportent à l'acquisition des concepts généraux d'espace, de temps, de mouvement, de force, etc., et leur emploi dans la science; puis les problèmes qui concernent la transformation logique de concepts en tant que développement psycologique et instrument de naissance. Dans la logique pure il examine la valeur réelle des lois formelles du raisonnement, ainsi que les conditions nécessaires pour qu'elles résultent un criterium de preuve relativement aux faits. Dans la logique formelle, il fait voir comment elle est un instrument rigoureux de transformation de raisonnement contrôlable dans sa valeur, en dehors des hypothèses et des expériences, ainsi que de leur contenu effectif et de la réelle signification du raisonnement. Enriques a profité de la traduction française faite par Rougier de la seconde partie de ce livre, pour

remanier quelques questions. Il y examiné une foule de faits depuis les expériences psycho-physiologiques jusqu'aux travaux des géomètres, des physiciens et des biologistes contemporains; depuis les recherches des historiens sur la génèse des principales découvertes, jusqu'aux hypothèses les plus hardies sur la généralisation de la géométrie non euclidienne, et de la dynamique non newtonienne. Il utilise tout ce qui a été pensé par l'esprit humain relativement à l'espace, au temps, à la force, dominant le tout par une vue générale et personnelle. Naturellement, les thèmes ainsi traités sont sujets aux objections. Voici comment Leo Brunschvicg termine une notice sur ce livre : « Les difficultés qu'on a rencontré à faire rentrer les relations d'ordre dans la logique des classes; la nécessité où a été Russell d'abandonner toute la métaphysique de *The principles of mathematics*, prouvent que le passage des anciens sens des mots « concepts » et « logique » aux sens contemporains, soulevent une série de problèmes psychologiques et scientifiques qu'on ne peut pas supposés resolus par prétérition ».

Le docteur Enriques a rédigé le chapitre relatif aux *Principes de la Géométrie* dans la grande *Encyclopédie de sciences mathématiques pures et appliquées,* publiée sous les auspices des académies de Göettingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, avec la collaboration de nombreux savants, tant dans l'édition allemande primitive (1) que dans l'édition française; cette dernière, œuvre inmense capable de rébuter les hommes de peu de foi, aurait cependant été menée à bon terme, si la Guerre d'un côté, et la mort de son directeur Jules Molk n'avaient provoqué sa paralisation depuis 1914. Plusieurs autres chapitres devaient être écrits par Enriques, de même que par Langevin, outre celui que ce dernier savant a écrit sur les systèmes deformables d'après l'article allemand de E. Abraham, de Milan. Dans l'édition allemande, on trouve, cependant, deux autres articles de Enriques en collaboration avec Castelnuovo : *Grundeigenschaften der Algebraischen Flächen* (III, 6*a*, 1914), et *Die Algebraischen Flächen von Gesichtspunkte der birationalen Transformation* (1914).

Dans son livre *Scienza e razionalismo,* Enriques émet de nombreuses réflexions sur la science rationelle en même temps qu'il fait défiler devant nous tous les systèmes philosophiques; son but principal est de combattre le pragmatisme contemporain, en mettant en relief la valeur de la science et son sens social et politique; le progrès évolutif

(1) *Encyclopädie der Math. Wissenschaften : Principien der Geometrie* (III, 1).

dans l'histoire de la pensée existe réellement et s'achemine vers des formes toujours de plus en plus élevées. Sont spécialement à signaler dans ce livre, la 3e et la 5e partie. Dans la troisième, qui traite du *Rationalisme et historicisme,* nous trouvons un essai sur la théorie de l'État, essai destiné à mieux faire comprendre le rationalisme de l'auteur; il y rattache les arguments philosophiques de son livre avec les questions débatues par la science politique contemporaine. Aucune forme d'État n'est parfaite en soi ; chaque gouvernement représente un compromis entre des forces historiques et les aspirations rationelles, et réflechit les conditions idéales de la nation. La démocratie, pour si large qu'elle soit, pour si libre qu'on la conçoive, ne crée pas dans le peuple la conscience et l'aspiration vers le progrès national; elle le suppose, au contraire, et vit, en dernière analyse, sur la persuasion que, une fois tous les obstacles écartés, l'âme des citoyens s'exalte dans l'amour de la patrie et dans la pensée d'un avenir meilleur. La cinquième partie s'occupe du concept étrange que certains auteurs se font de la philosophie, en la supposant séparée de la science; ce chapitre traite plusieurs points dignes de mention, par exemple, celui de la classification des sciences, dans lequel il compare A. Conte à Cournot. D'autres points sont fort épineux tel que celui de la foi religieuse. Les vues de l'auteur sont, donc, très contestées; mais, même ceux qui ne sont pas entièrement d'accord avec Enriques sur ce sujet, reconnaissent que ce livre, écrit d'un ton parfaitement modéré, contient une magnifique histoire du rationalisme et en marque les étapes succesives. Il fait le plus grand honneur à la philosophie italienne de notre temps.

Dans son livre *Per la storia della logica,* traduit en allemand, Enriques fait voir le développement de la logique dans le transcours des siècles, obeissant à l'influence des besoins de la pensée mathématique. En se plaçant à ce point de vue, il examine d'abord, la logique chez le anciens, puis le rationalisme, le développement de la logique moderne et la réforme du XIX siècle. Il élucide, à cette occasion, les rapports existant entre des diverses solutions et les divers points de vue qui se présentent comme un réseau embrouillé aux yeux de celui qui les abordent pour la première fois. La vérification, dit-il, ne peut jamais être considérée comme complète; toutes les théories scientifiques présentent un caractère provisoire, et la succesion des théories diverses dans l'histoire engendre une sorte de dialectique comparable à la hégélienne. Il termine en posant le problème final, savoir : existe-t-il des éléments indépendants de l'expérience et qui déterminent, en quel-

que sorte, l'évolution des hypothèses et des concepts de la science? Et après avoir analysé deux solutions positives de ce problème, celle de l'*a priori,* de Kant, et celle de l'*arbitraire,* de Poincaré; et après avoir aussi très ingénieusement montré leur similitude formelle, l'auteur finit par établir que les exigences de la raison s'affirment et se déterminent, non pas une fois pour toutes et par rapport à une forme vide, mais progressivement en fonction de l'expérience, en tant que critère d'interprétation de celle ci; et que, si elles renferment quelque chose de contrainte, ce ne peut être que certaines aspirations, que certaines tendances, mais nullement des principes rigides.

Passons maintenant au grand ouvrage titulé *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni,* publié par les soins du docteur Oscar Chisini, et qui comprend trois gros volumes, d'un total environ de 1700 pages. Enriques y fait un genre d'étude très en faveur en Italie : *l'étude qualitative* des équations et des fonctions algébriques. On ne disposait, pour ces questions, que des livres classiques de Salmon et de Clebsch, déjà vieillis. Or, vingt ans en arrière, en pouvait constater un mouvement bien défini, une unité d'action, sinon dans les méthodes, du moins dans l'idée d'établir une théorie générale des surfaces algébriques et de leurs courbes. Les résultats que l'on avait obtenu etaient même justement considérés comme le plus grand progrès réalisé à cette époque dans le domaine de la géométrie, ce que équivalait, analytiquement, à donner une base solide à la théorie des fonctions analytiques à deux variables indépendantes. Seulement, les études se faisaient en suivant deux courants différents : le géométrique, cher aux savants italiens et dont la source se trouve dans le mémoires de Brill et de Nöther; et le courant analytique, suivi en France, spécialement par Picard. On peut même voir dans le deuxième volume de la *Théorie des fonctions à deux variables indépendantes*, écrit par ce dernier mathématicien en collaboration avec Simart, une note de MM. Castelnuovo et Enriques, où ceux-ci expliquent très clairement les concepts et les propriétés plus essencielles obtenus par eux en suivant la voie géométrique. C'est, du reste, cette voie que Enriques a suivi dans le livre qui nous occupe, livre plein de résultats nouveaux, où on retrouve la marque de l'esprit critique de son auteur. Il comprend l'étude complète des fonctions algébriques de deux variables, soit : l'étude projective des courbes algébriques ; les propriétés de ces courbes qui demeurent invariantes dans les transformations birationnelles, la théorie des surfaces de Riemann; celle, si delicate, des

points singuliers des courbes algébriques planes, les questions de continuité et de réalité de ces dernières courbes; la géométrie sur une courbe plane, qui a pris elle aussi naissance, d'un côté par la voie géométrique, dans l'étude des intersections des courbes algébriques planes et, d'un autre, dans les recherches des analystes qui, après Abel et Riemann, étudièrent les intégrales des fonctions rationnelles attachées à une courbe algébrique, c'est-à-dire, aux intégrales abéliennes. Ce double chemin à fait ressentir le développement de la question. Enriques et Chisini, nous l'avons dit, s'en tiennent au point de vue géométrique, mais ils signalent, chaque fois qu'il le faut, le contact de leurs développements avec la théorie des fonctions. Les auteurs ont voulu mettre à la portée et à la disposition des jeunes mathématiciens, l'exposé des leçons que Enriques donnait depuis longtemps à l'Université de Bologne, évitant ainsi, surtout aux débutants, beaucoup de recherches dans le labyrinthe de mémoires publiés à ce sujet. Cet ouvrage sera donc utile, en général, à tous ceux qui voudront se documenter sur les questions qui, de près ou de loin, touchent la théorie des courbes planes. Ils y trouveront, par exemple, le *principe de conservation du nombre,* qui avait été attaqué, vers 1904, par divers géomètres et ses applications à différents problèmes de la géométrie projective. Ils y verront le théorème de Harnack, sur le nombre de branches réelles d'une courbe plane, etc.

J'ai parlé plus haut d'une certaine rivalité qui existait autrefois entre l'école des analystes et celle des géomètres. Enriques y fait une très belle allusion dans sa conférence *Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques d'après l'école italienne,* donnée à la réunion de printemps de la Société mathématique suisse, tenue a Lugano le 22 avril 1924. Il fait voir comment la conception géométrique des problèmes relatif aux domaines des équations et des fonctions algébriques, a élargi et transformé la position classique des problèmes de l'algèbre ; et cela est, spécialement, l'œuvre de l'école italienne. Il cite entre d'autres exemples, précisément celui que je viens de mentionner sur « le principe de la conservation du nombre » lequel peut se dégager de celui de continuité de Poncelet. Entre les mains de mathématiciens tels que De Jonquières, de Cremona, Cayley, Zeuthen et Schubert, il est devenu la base d'une méthode systématique de recherches, et a aussi reçu un très grand développement par les travaux de Segre, Castelnuovo, Pieri, Severi, etc. A titre d'exemple on peut signaler, parmi les résultats obtenus, celui de la détermination rigoureuse des conditions de validité du principe en ques-

tion, conditions qui n'avaient que partiellement été reconnues par Zeuthen et Schubert.

Je dois me presser et me limiter à mentionner le livre de Enriques qui contient ses *Conferenze di geometrie non euclidea,* écrite par les soins de O. Fernández et sont ouvrage sur les *Elementi d'Euclide et la critica antica e moderna* avec le concours de nombreux collaborateurs. C'est un exposé des livre I-IV du géomètre grec en tenant compte de toutes les critiques émises. Il a été publié en 1925 sur la base du texte grec de Heiberg accompagné d'une nouvelle traduction italienne où chaque idée est largement détaillée et commentée. C'est un livre qui intéressera tous les professeurs chargés de cours de méthodologie mathématique.

Il y a aussi les travaux de Enriques presentés dans les congrès (1),

(1) En 1908 au « IVme Congrès International des Mathématiciens » tenu à Rome du 6 au 11 avril. Enriques prononça un discours sur *Matematice e Filosofia.*

En 1911, au « Premier Congrès International de l'Enseignement Mathématique » tenu à Milan du 18 au 21 septembre, il fit une conférence sur *Mathématiques et Théorie de la Connaissance.* Ce congrès, tenu à la salle de l'École Polytechnique, fut ouvert par le président M. Felix Kleiu.

En 1912, au « Vme Congrès International de Mathématiciens » tenu à Cambridge du 22 au 28 août, Enriques eut à sa charge la première conférence à sections réunies; son thème fut : *Il significato della critica dei principi nello sviluppo delle matemátiche.*

En 1913, au VIIme Congrès tenu à Sienne par la « Società Italiana per il progreso delle scienze » du 22 au 27 septembre, Enriques présenta un mémoire *Sur les conditions suffisantes dans le Calcul des variations.*

En 1914, au « Congrès de Philosophie Mathématique » reuni à Paris du 6 au 8 avril, le mémoire de Enriques fut *Sur quelques difficultés soulevées par l'Infini mathématique.* Ce travail a été publié par la *Revue de Métaphysique et de Morale.* Du reste les actes du « IVme Congrès de la Société philosophique italienne » publient un autre article de Enriques sur *Razionalismo è Misticismo.*

Le Société italienne de mathématiques « Mathesis » a tenu trois Congrès presidés par Enriques : l'un a Naples, du 13 au 16 octobre 1921, Enriques fit une conférence sur *Evoluzione del Concetto della Scienza dei Pensatori matematici;* un autre à Livourne, le 25 et 26 septembre 1923, Enriques prononça un magnifique discours-conférence sur *La signification humanistique de la science et sa valeur dans la formation de l'âme nationale,* dont l'objet principal était *L'enseignement des sciences dans les écoles secondaires italiennes;* un troisième Congrès fut tenu à Milan du 29 au 31 octobre 1925, sur l'invitation du Comité local de cette ville presidé par G. Vivanti. La conférence de Enriques fut sur *L'essenza della matematica.*

Un an avant, le 22 avril 1924, à Lugano, Enriques donna une conférence *Sur la Théorie des Équations et des Fonctions Algebriques d'après l'École géométrique Italienne.* Cette conférence eut lieu à l'occasion de la réunion de printemps de la Société Mathématique Suisse, Enriques y donna un compte-rendu des recherches

tel que l'International de Bologne, qu'il a présidé en 1911; puis celui tenu la même année à Milan, sous la présidence de Felix Klein: Enriques y fit, en français, une remarquable conférence sur les *Mathématiques et la théorie de la connaissance*, où il retrace, à grands traits, l'histoire de l'idealisme en rappelant les critique de Zenon et des éleates, d'Eudoxe, de Platon, Speusippe, Bacon, Galilée, Huyghens, Descartes, Leibnitz, Newton, et il termine en établissant que, actuellement, le problème gnoséologique est assis sur un terrain scientifique positif, où deux courants d'idées semblent se trouver en présence : l'école logique et l'école psycologique à laquelle appartient Enriques, école qui explique les axiomes en démélant ce qu'ils renferment d'expérimental, reduisant l'*a priori* à la pure fonction logique de l'esprit. Quelle que soit, du reste, l'idée que l'on se fasse de la solution, le problème ne saurait être traité, actuellement, pas plus qu'il ne l'a pu être à aucune autre époque de l'histoire de la pensée, qu'en se plaçant sur le terrain de la critique issue du développement des mathématiques.

Trois ans avant, au IVme Congrès International de Mathématiciens tenu à Rome, Enriques, en sa qualité de président de la sous-section de philosophie, avait fait un intéressant discours d'ouverture, où il parla de la *Mathématique et la philosopie.* Après avoir signalé, entre d'autres faits, les divers aspects de l'évolution de la pensée philosophique dans le champ mathématique, il fit observer que le dualisme que l'on rencontre entre les deux points de vue, logique et psycologique, parmi des penseurs mathématiciens, correspond aux différentes conceptions qu'ils se forment de la science, envisagée : chez les uns, du point de vue statique de la théorie accomplie, et chez les autres, du point de vue dynamique de la genèse des théories ou de leur histoire. *Mais, au dessus des plus grands contrastes sur les idées philosophiques, le progrès de la science se dresse toujours victorieux dans l'avenir.*

A la Vme séance de ce Congrès, tenu à Cambridge en 1912, Enriques prit part à la discussion relative à un article du professeur Run-

que l'école italienne entreprit dans ce domaine des équations et des fonctions algébriques, et le côté trascendant que représentent ces questions.

En 1925, Enriques, invité à tenir une conférence à la Société Mathématique de France à l'occasion de son cinquantenaire, fit un rapport sur *La Théorie des surfaces algébriques.*

En 1926, ce furent deux conférences à la « Harvard University » de Cambridge (S. U. A.) sur l'*Histoire de la Pensée Grecque;* puis trois autres au « Rice Institut » de Huston, Texas (S. U. A.).

ge, de Göttingen, sur l'enseignement de la physique mathématique qui, de l'avis de Enriques, n'était pas assez fait pour développer une intuition heureuse ; et même, il tend parfois à rebuter les esprits les plus intuitionistes en leur donnant trop d'algorithmes de l'analyse, dans lesquels, le moyen semble être pris comme fin. Dans ce même Congrès, Enriques presenta un mémoire sur *Il signiticato della critica dei principii nello sviluppo delle matematiche*, où reprenant les thèmes traités antérieurement, il s'occupe de la notion de continuité, du procédé infinitesimal dans l'antiquité, de la fondation du calcul différentiel, de la critique des concepts infinitésimaux, du nouveau développement du calcul des variations, des fonction arbitraires et de l'élaboration moderne du concept du continu, du développement intensif des mathématiques, des équations et des nombres imaginaires, de la théorie des fonctions algébriques selon Riemann, et de la critique des principes de la géométrie, du nouveau développement de l'algèbre ; pour conclure que, malgré leur apparence arbitraire, les postulats ne sont, en réalité, que le fruit d'un long processus d'acquisition et d'un éffort assidu qui revèlent quelques motifs généraux de recherches. Il y a une tradition de problèmes et un ordre qui préside le progrès extensif et intensif de la science, et c'est pour cela qu'il y a une matière propre aux mathématiques, et c'est elle que les définitions cherchent à respecter. Les mathématiques sont un instrument et un modèle de la science.

Citons finalement son mémoire *Sur les conditions suffisantes dans le calcul des variations* présenté au VIIme Congrès de la « Societá italiana per il progreso delle scienze », tenu a Sienne, en 1918. Ses conférences aux Congrès tenus à Naples, à Livourne et à Milan par la société « Mathesis » en 1921, 1923 et 1925 intitulées respectivement : *Évolution du concept de la science chez les penseurs mathématiciens ; La signification humanistique de la science et sa valeur dans la formation de l'âme national ; L'essence de la mathématique.*

Un peu avant la guerre, en 1914, au Congrès de philosophie mathématique reuni à Paris au moi d'avril, Enriques presenta un mémoire *Sur quelques difficultés soulevées par l'infini mathématique.* Cette question fut discutée à ce Congrès par MM. Borel, Cahen, Couturat, Lebesgue, Dufumier, Whitehead et Hadamard, qui s'est défendu d'être réaliste au sens de Enriques, c'est-à-dire, d'admettre l'existence d'un infini actuel ; il approuve dit-il les critiques adressées par Burali-Forti au cantorisme, mais il admet cependant le postulat de Zermelo, d'après lequel le continu peut être bien ordonné, ce qui implique la possibi-

lité, pour l'esprit, de concevoir une infinité de choix indépendants. Enriques qui admet la fonction Dirichlet-Riemann parce que la notion est sugérée par l'experience, n'admet pas, en revanche, l'axiome de Zermelo qui suppose un choix comme qui dirait extra-experimental.

Messieurs :

Il vous semblera que je me suis trop étendu et que j'ai abusé de votre patience; mais ce n'est pas ma faute si les travaux de Enriques sont si nombreux et si importants et encore que je ne les ai pas tous mentionnés. Et que vous dirai-je des mémoires publiés dans les journaux scientifiques? Je vous ai anticipé qu'il me faudrait les prendre en bloc. Et en effet, savez-vous combien que j'en ai trouvé indiqués, seulement en cherchant des informations dans ma bibliothèque, forcément bornée, puisque je ne suis qu'un simple particulier plus ou moins amateur de la philosophie mathématique. En bien! J'en ai compté près de 120 que j'ai classé dans les feuilles que voici (1) en ajoutant dans quelques unes les notices faites par des mathématiciens de profession qui les ont analysées. J'en ai trouvé signalés dans plus de vingt-cinq revues scientifiques : dans les actes de l'illustre Académie des Lincei, à laquelle appartient Enriques; dans les Compte-rendus des académies de sciences de Bologne, de Palerme, de Turin, de Paris, dans le *Matematische annalen,* dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées,* dans celles des écoles normales supérieures de Paris et de Pise, dans diverses revues philosophiques, dans les Comptes-rendus des Instituts lombards et venitiens; dans « Mathésis », dans « Scientia », et j'en passe (2). Ces mémoires se rapportent a des ques-

(1) La liste se trouve plus loin.

(2) Voici la liste détaillée : *Comptes-rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris),* 8; *Atti della Reale Accademia dei Lincei,* 27; *Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna,* 18; *Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna,* 1; *«Scientia»,* 17; *Mathematische Analen,* 6; *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 7; *Annali di matematica pura ed applicata,* 5; *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino,* 3; *Memoria della Reale Accademia delle Scienze di Torino,* 1; *Periodico di mattematiche,* 7; *Revue de Méthaphysique et de Morale,* 1; *Rivista di Filosofia,* 1; *Rivista Filosofica, Pavia,* 2; *Acta Matemática,* 1; *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure,* 1; *Annali della Real Scuola superiore di Pisa,* 1; *Giornale di Mattematiche (Studenti),* 3; *Memoria della Società Italiana della Scienza (detti dei XL),* 1; *Bollettino della « Mathesis »,* 1; *Rendiconti del Real Istituto lombardo di scienze e lettere,* 3; *Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti,* 2. Total 117.

tions philosophiques et mathématiques des plus élevées, a la Théorie des courbes et des surfaces algébriques, aux Transformations de la droite dans l'espace, aux notions de correspondance, de représentation et de transformation; à la Géométrie à plus de trois dimentions; à la Géométrie non euclidienne; à la Géométrie différentielle; aux Fondements de la géométrie; au Problèmes de la realité; à l'Epistemologie, etc.

Ceci porte à plus de 200 les contributions de Mr Enriques (1).

En bien Messieurs! Croyez vous que notre Académie pouvait impassiblement contempler le séjour parmi nous de pareils bûcheurs de la science, de pareils héros du travail et du progrès? Elle ne pouvait, hélas! que leur offrir ce titre qu'elle leur a offert, et encore que ce soit le plus élevé qn'elle puisse accorder, il ne signifie que peu de chose auprès des autres que d'antiques et glorieuses institutions leur ont déjà, et depuis longtemps, décernés. Mais ce sont des hommes supérieurs qui sauront comprendre la signification de nos hommages et apprecier les nobles sentiments qui les ont inspirés.

Qu'ils soient, donc, les bienvenus!

Et, quant de retour chez eux, pendant que le feu sacré qui les soutient et les anime les portent à éclairer les coins encore obscurs de la science, qu'ils veuillent bien se souvenir de nous qui suivrons attentivement d'ici, la marche ascendante de leur triomphe, ainsi que leur consécration definitive.

(1) La liste se trouve plus loin.

(Continuará.)

RÉPÉTITION DES IMPRESSIONS CINESTHÉSIQUES

DANS L'ÉVOLUTION DES ALLURES

Par PAUL MAGNE DE LA CROIX

RÉSUMÉ

Dans ce travail l'auteur étudie la forme, l'ordre et la fréquence de répétition des impressions cinesthésiques, au cours de l'évolution des allures; ces investigations lui ont fourni l'explication d'un grand nombre de faits dont la cause semblait douteuse jusqu'à présent; elles lui ont démontré aussi que la loi qui régit la répétition des impressions cinesthésiques est celle qui régit l'évolution des allures quadrupédales et bipédales.

Mon ami, le distingué psychologue docteur Ch. Blondel, qui s'est tenu au courant de mes investigations sur la locomotion, m'a objecté qu'en elles je devais tenir compte du rôle du système nerveux.

Au premier abord je ne vis pas la possibilité d'une telle étude, pour la faire il eut fallu être plus versé en neurologie que je ne le suis, mais après réflexion je pensai que si je ne pouvais pas faire cette étude en toute son amplitude, je pourrais du moins étudier la forme, l'ordre et la fréquence de répétition des impressions cinesthésiques au cours de l'évolution des allures, ainsi que les modifications que subissent ces répétitions au cours de cette évolution, il en résulterait quelques problèmes formulés avec précision dont les neurologues pourraient ensuite chercher la solution si la question les intéressait.

Comme on le verra plus loin cette étude a donné ce résultat prévu et aussi celui inespéré de m'expliquer une quantité de faits auxquels jusqu'ici, je ne trouvais qu'une explication douteuse.

Pour exposer le rôle du système nerveux dans la reproduction des mouvements, j'emprunterai quelques pages au docteur Morat, qui a magistralement traité cette question au cours de la *Physiologie* qu'il

a écrite en collaboration avec le docteur Doyon, dans la partie de cet ouvrage consacrée à la sensibilité et au mouvement.

Je ne puis songer à reproduire ici tout ce qui, dans la *Physiologie* de MM. Morat et Doyon, se réfère à cette question, mais seulement les passages les plus importants.

A la page 62 de la partie précitée de cette *Physiologie,* le docteur Morat dit : « L'appareil musculaire se trouve de la sorte participer aux fonctions, sensitives et sensorielles, en tant qu'il est exécuteur des représentations qui sont élaborées dans le système nerveux. Mais son rôle ne se borne pas là; il devient à son tour informateur du système nerveux en lui renvoyant, sous forme d'excitation, l'écho atténué de son propre mouvement ou de son travail. Ce sont ces excitations et la notion plus ou moins nette que nous en avons qui constitue ce que l'on appelle couramment le sens musculaire ».

Plus loin, page 63, cet auteur continue : « Le sens dit musculaire est mêlé au fonctionnement de tous les sens proprements dits. Il entre comme un élément nécessaire et comme dans ce fonctionnement qui, sans lui, serait impossible ou réduit à des notions pratiquement inutilisables ».

Et, page 66 : « L'impression cinesthésique partie d'un muscle en contraction joue en principe le rôle d'élément informateur à l'égard du système nerveux. Cette information peut être utilisée, séance tenante, par un réflexe fonctionnel dans le genre de ceux qu'on trouve exister entre deux groupes de muscles antagonistes (fléchisseurs et extenseurs, par exemple).

Comme leur entrée en jeu ne peut être évidemment qu'alternative, le muscle en contraction inhibe par son réflexe son antagoniste et réciproquement. »

Page 79 cet auteur continue : « Un mouvement ou ensemble de mouvements musculaires, par les cinesthésies qu'il suscite, marque son empreinte dans le système nerveux. Cette empreinte peut évoquer de nouveau le mouvement musculaire ».

Enfin voici une partie du résumé de son explication que le docteur Morat donne page 80 :

« Le premier principe sur lequel repose notre explication est celui de la conservation automatique de l'exécution...

« Le deuxième principe est celui de l'attribution de la conscience non pliée à des éléments privilégiés, mais à l'extension, à la complexité, à la valeur des systématisations dans lesquelles ceux-ci sont appelés à entrer...

« Le troisième principe est celui du partage des systèmes sensorio-moteurs en systèmes superposés automatiquement ou autonomes, susceptibles soit de s'isoler, soit de s'actionner mutuellement en vue de l'activité propre. »

Ces citations données, je crois qu'avant de passer à l'étude de l'ordre et de la forme dans lesquels se reproduisent les réflexes sensorio-moteurs il est nécessaire de reconstituer les premières représentations de mouvements relatifs à la locomotion terrestre quadrupédale qui se sont élaborés dans le système nerveux, résultat qui peut s'obtenir en déterminant quel a été le premier groupe de mouvements contribuant à la locomotion terrestre qui a été exécuté par un membre.

Les vértébrés aériens dérivent des vertébrés aquatiques comme le démontre non seulement les similitudes qui existent entre ces derniers et les plus primitifs des vértébrés terrestres, mais aussi le fait qu'un certain nombre d'animaux terrestres conservent, pendant toute l'évolution des allures reptiliennes, les torsions et contretorsions du corps dont l'usage a été contracté dans l'eau et ne peut avoir été acquis que là (1).

Ceci étant posé, ce qu'il y a de mieux à faire, pour se rendre compte de ce qu'a été le premier groupe de mouvements qui origina les premiers réflexes, c'est d'observer un des animaux qui dans leur jeune âge reprennent la locomotion terrestre dès son debut; le chat est l'un d'eux.

Un jeune chat quand il éprouve le premier désir de se déplacer se met à exécuter des torsions et contretorsions du corps qui sont parfaitement identiques à celles que décrit un poisson quand il se meut dans l'eau, puis comme le résultat obtenu est nul, et comme ces torsions mettent en avant alternativement une paire diagonale de membres, puis l'autre, l'animal tâche de prendre contact au sol par le membre antérieur, appartenant à la paire diagonale de membres avantagée par la torsion, et de s'attirer en avant grâce à lui, le résultat obtenu est encore presque nul à cause de la résistance qu'offre la friction du corps sur le sol (2).

Pour supprimer cette résistance, l'animal s'essaye ensuite à soule-

(1) J. Bell Pettigrew, en *La locomotion chez les animaux*, a minutieusement étudié la double courbe décrite par le corps d'un poisson qui se meut dans l'eau; dans son travail *The upright posture of man*, le docteur W. K. Gregory, justement déduit, d'investigations anatomiques, que ces mouvements de torsion devaient avoir présidé aux premiers essais de locomotion terrestre.

(2) Cette observation et toutes elles qui suivent sont venues demontrer le bien-fondé, de la théorie de la catagénèse de Cope.

ver son corps sur trois membres et voici comment il opère : quand une torsion du corps a porté en avant un bipède diagonal, le membre postérieur appartenant à ce bipède s'appuie à terre, sur place, en même temps que les deux membres appartenant à l'autre bipède et conjointement à eux il s'essaye à soulever le corps, pendant que l'antérieur diagonalement opposé à lui se porte en avant, prend contact avec le sol, et attire à lui, par traction, la masse du corps.

Par suite de la courbure décrite par le corps, le membre resté le plus en arrière est le postérieur latéralement opposé au membre antérieur avancé c'est donc lui qui aura le premier à répéter le mouvement exécuté par cet antérieur et ainsi se crée le réflexe antéro-postérieur latéral.

Analysons maintenant les mouvements exécutés par l'antérieur : la première partie de cet ensemble d'actes représente les deux périodes d'évolution comme pendule normal, l'autre partie ainsi que celle préliminaire qui a consisté à préparer le membre à évoluer comme pendule normal, représente la moitié d'une de ces périodes que j'ai appelée interévolutives, je m'étendrai plus loin sur ce point.

Le point d'appui, trouvé à terre, ces animaux ont du concevoir l'acte d'attirer, par la force musculaire de leur membre, leur corps à la hauteur du point d'appui, acte aussi assez semblable à celui effectué dans l'eau mais nécessitant un déploiement plus considérable de force qui motiva, sans doute, vu la nécessité d'un instant de repos après l'effort, ces temps d'arrêt des membres si caractéristiques dans les allures reptiliennes. Ceci représente l'origine de la moitié de l'évolution comme pendule inverti qui est suivi d'un temps d'arrêt (1) la fin de l'évolution comme pendule inverti ne s'exécutant que quand un autre membre se met à son tour à opérer la traction.

Dans les allures reptiliennes les plus basses c'est encore la traction du corps au moyen du membre avancé qui reste le principal facteur de progression en avant, tandis que, dans la plus élevée de ces allures, entre en jeu la propulsion, laquelle devient, à peu près, l'unique facteur de progression dans les allures marchées.

Ceci exposé il en résulte donc bien nettement que le premier groupe d'impressions cinesthésiques créé a été celui de l'évolution d'un membre comme pendule normal (2) mais avant de voir comment ce groupe

(1) De récentes investigations m'ont prouvé que c'est là qu'il faut le placer.

(2) Les frères Weber ont comparé l'oscilation d'un membre au soutien à l'évolution d'un pendule normal, Raabe à amplifié cette conception assimilant l'évolution d'un membre à l'appui à celle d'un pendule inverti.

d'impressions cinesthésiques a été reproduit ainsi que l'évolution qu'a subie cette reproduction je crois nécessaire d'exposer bien clairement ces évolutions des membres comme pendule normal et comme pendule inverti.

Dans ma *Filogenia de las locomociones cuadrupedal y bipedal en los vertebrados,* en une brève note, j'ai exposé que, dans les allures marchées, les six positions de pendule (trois normales et trois inverties) déterminent six périodes toutes d'égale durée, quatre d'entre elles sont évolutives et deux interévolutives.

Il est bon d'ajouter que des quatre périodes évolutives deux appartiennent à l'évolution comme pendule normal et au soutien et deux au pendule inverti et à l'appui. Les deux interévolutives appartiennent chacune par moitié au soutien et à l'appui, ces deux moitiés étant séparées par un changement d'appui instantané (1).

Il résulte de ceci que si l'évolution comme pendule normal ou celle comme pendule inverti, ne dure que deux périodes, l'appui ou le soutien en dure trois.

Il faut faire remarquer en plus que cette instantanéité du changement d'appui n'existe que dans les allures marchées régulières et actives, dans les allures marchées irrégulières et lentes un double appui qui s'intercale en lui, prend une certaine durée; dans les allures reptiliennes la durée du double appui équivaut parfois à celle de plusieurs périodes.

Le point le plus important à retenir de tout ceci pour l'étude des allures est que les évolutions comme pendule normal et inverti durent deux périodes tandis que le soutien en dure trois et l'appui au moins trois et parfois plus.

Dans l'allure quadrupédale la plus primitive : la prototypique, l'animal, pour répéter par un postérieur l'impression cinesthésique produite par un antérieur, est obligé d'attendre que l'antérieur avancé

(1) Raabe admet le changement d'appui comme instantané, Lenoble du Teil lui assigne une durée égale à 1/6 de celle d'un pas complet Marey alla d'une de ces opinions à l'autre; Gossart, Lesbre, Goubeaux et Barrier ainsi que la majorié des auteurs modernes admettent que la durée du changement d'appui est variable mais qu'elle ne peut jamais arriver à être instantanée dans les allures marchées; la durée du changement d'appui est variable si on la considère à la fois dans les allures marchées irrégulières, et dans les regulières, mais à l'encontre de l'opinion de ces auteurs le changement *d'appui* est instantané dans les pas reguliers. (Voir mon travail *Sur l'instantaneité du changement d'appui* qui va paraître prochainement en *Revista de la Sociedad de medicina veterinaria.)*

ait exécuté la période de traction, il en résulte donc que l'impression cinesthésique résultant du mouvement de l'antérieur est reproduite par la postérieur avec un retard de quatre périodes.

Dans les allures qui, dans l'échelle évolutive, succédent l'allure prototypique : la mesherpètique et la paraherpétique, l'animal n'est plus obligé d'attendre, pour reproduire le mouvement avec un autre membre, que la traction en avant se soit produite, il lève l'autre membre aussitôt que le membre qui vient d'évoluer commence sa traction. c'est-à-dire avec un retard de seulement trois périodes; dans ces con-

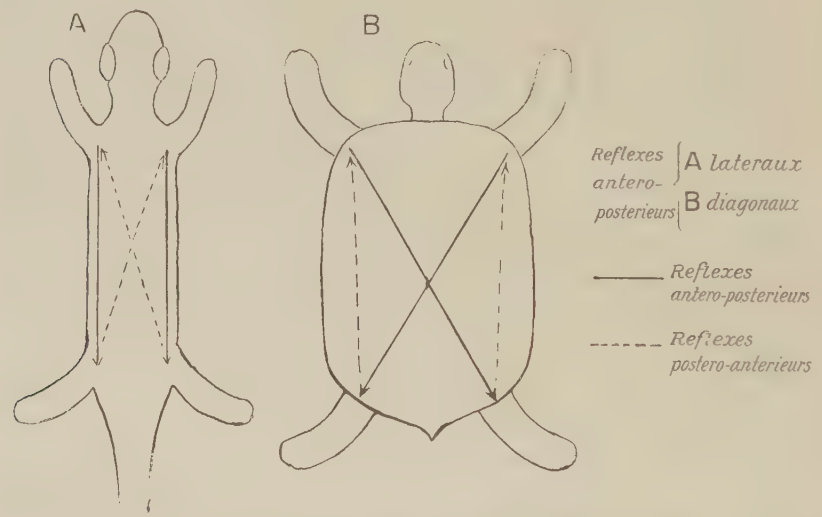


Fig. 1. — Schema des réflexes antéro-postérieurs diagonaux et latéraux

ditions le dernier membre levé, aidé par celui qui l'a précédé, s'entraine dans son futur rôle de propulseur mais ayant à lutter contre la force d'inertie, qui dans ces allures est représentée par la continuation de l'arrêt de la masse, il en résulte que l'extension, qui précéde l'évolution du membre comme pendule normal se traduit, en grande partie, par une projection du membre en arrière.

Donc dans ces deux allures un postérieur reproduit l'impression cinesthésique créé par un antérieur avec trois périodes de retard, mais le fait curieux est que chez certains animaux tel le camaléon (et il en fut ainsi pour les ancêtres de tous les mammifères, de tous les sauriens et pour ceux des oiseaux coureurs), l'impression cinesthésique produite par un antérieur est reproduite par le postérieur,

latéralement opposé ce qui donne l'allure mésherpétique, tandis que chez d'autres, tels les tortues et les grenouilles (et il en dût être de même pour les ancêtres de tous les oiseaux, exception faite des oiseaux coureurs), l'impression cinesthésique créée par le mouvement de l'antérieur est reproduite par le postérieur diagonalement opposé d'où il résulte l'allure parherpétique (1).

Je crois que cette différentiation provient du désaccord qui s'est manifesté, en l'origine des allures terrestres, entre l'emploi des torsions du corps et l'emploi des membres qui entravait l'exécution continue des premiers, il en est résulté que tandis que certains animaux arrivaient à une semi concordance dans ce double emploi en passant du prototypique au mésherpétique, d'autres renonçaient franchement à l'emploi des torsions du corps et contractaient de ce fait le réflexe antéro-postérieur diagonal, l'allure obtenue étant la parherpétique.

Fig. 2. — Une phase du mérsherpétique, allure reptilienne à réflexes antéro-postérieurs latéraux. D'après une photographie instantanée de camaléon (*camalion vulgaris*).

Quoiqu'il en soit il faut constater que le premier système (reproduction du mouvement de l'antérieur par le postérieur latéralement opposé) a donné naissance à une évolution méthodique dont toutes les phases ont été conservées jusqu'à nous par des animaux encore vivants, tandis que le second (reproduction du mouvement de l'antérieur par le postérieur diagonalement opposé) a donné naissance à une évolution cahotique dont les premières phases ainsi que les dernières sont encore représentées par des animaux existants, phases qui permettent de relier aux premières les animaux qui pratiquent les dernières, mais malheureusement dans cette évolution la majorité des phases intermédiaires ne sont plus représentées par aucun animal vivant ce qui empêche de suivre pas à pas cette évolution comme la première.

(1) Quand les réflexes antéro-postérieurs sont latéraux les réflexes postéro-antérieurs sont diagonaux, quand les réflexes antéro-postérieurs sont diagonaux les réflexes postéro-antérieurs sont latéraux.

(2) Il faudrait admettre dans ce cas qu'à côté de l'allure primitive prototypique à réflexes latéraux a existé une à réflexes diagonaux qu'on pourrait appeler para-prototypique.

De ceci il résulte que c'est seulement dans l'évolution dérivée du mésherpétique que nous pourrons continuer l'étude de la reproduction des impressions cinesthésiques.

J'ai exposé dans ma *Filogenia* qu'avec l'allure mésherpétique les animaux font la conquête d'une première base bipédale, elle est diagonale et alterne avec des bases tripédales et quadrupédales. Ce résultat est obtenu grâce à la reproduction plus rapide de l'impression cinesthésique créée par un membre antérieur, non seulement par le membre postérieur latéralement opposé, sinon aussi par l'autre antérieur. La reproduction aussi rapide que possible par ces deux membres d'une impression cinesthèsique produite par un antérieur, donne la première allure marchée, le pas pithécoide, et a pour résultat de faire disparaître les temps d'arrêt des membres.

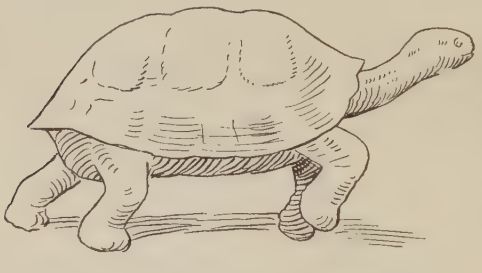


Fig. 3. — Une phase du parherpétique, allure reptilienne à réflexes antéro-postérieurs diagonaux. D'après une photographie instantanée de tortue géante *(Testudo elephantopus)*.

Le maximum de rapidité avec lequel, dans une allure non sautée, le postérieur peut reproduire l'évolution comme pendule normal, exécutée par un antérieur, est de deux périodes, temps nécessaire à cette évolution, mais pour le congénère antérieur le retard imposé est de trois périodes puisqu'il ne peut se lever que quand son congénère a pris l'appui et qu'il ne peut le faire, comme nous l'avons démontré plus haut qu'après avoir été au soutien durant trois périodes.

Mais il semble que quand cette allure est suffisamment confirmée pour que l'animal puisse s'essayer à passer à une allure plus rapide, pour le faire, les postérieurs ne doivent plus reproduire leur mouvement que grâce à l'impression cinesthésique produite par leur congénère et le réflexe antéro-postérieur doit être supprimé, ceci semble être prouvé par le fait qu'alors les postérieurs recouvrent, si l'animal le veut, une complète indépendance relativement aux antérieurs qui, au cours des différentes allures marchées (1) qui succèdent au pas pithécoide, augmentent progressivement leur avance d'une période

(1) Les allures marchées régulières stabilisent le gain qui se produit au cours des allures irrégulières.

par chaque nouvelle allure sans qu'il y ait répercussion de cette avance sur le jeu des postérieurs.

Cette supression du réflexe antéro-postérieur doit être consécutive soit au désir de l'animal d'activer l'avance de ses antérieurs soit à celui d'obtenir un emploi plus efficace de la propulsion et serait donc, probablement, volontaire, mais la suppression de ce réflexe est seulement passagère et limitée comme durée à la période pendant laquelle l'animal emploie des allures irrégulières, de nouveaux réflexes se fixant quand l'animal adopte une nouvelle allure régulière (1).

Si l'on opte pour cette manière de voir, cela permet d'admettre des réflexes antéro-postérieurs diagonaux pour les mammifères possédant des allures où la succession des levers antéro-postérieurs se fait dans cet ordre, mais il faut aussi admettre la possibilité de la possession de deux réflexes différents pour les mammifères ayant différentes allures dont les unes comportent la succession latérale de levers et les autres, la diagonale.

Au cours de l'évolution des allures marchées, les membres antérieurs continuent à augmenter leur avance sur les postérieurs jusqu'à ce qu'un gain de six périodes mette chaque antérieur dans la même période de mouvement que le postérieur du même côté; ce gain est acquis avec l'amble. Donc dans l'évolution des allures marchées, abordée avec une avance de deux périodes en faveur des antérieurs, l'animal semble chercher à augmenter constamment l'avance des antérieurs jusqu'à ce qu'une avance de six périodes lui fasse atteindre le parallélisme. Seule l'étude de la reproduction des impressions cinesthésiques m'a permis de comprendre bien, enfin, le jeu de cette évolution.

Quand au cours de cette évolution l'animal eut acquis une période d'avance, en plus de celle qui existe dans le pas pithécoide, il s'est trouvé être au trot marché avec trois périodes d'avance de l'antérieur sur le postérieur et quand, à la fin de l'évolution des allures marchées, il eut, avec une augmentation de quatre périodes, acquis six périodes d'avance il s'est trouvé posséder l'amble.

Le fait que dans ces allures un antérieur se trouve associé dans son

(1) Et ceci explique pourquoi les animaux qui ont abandonné la locomotion quadrupédale, quand ils sont obligés à la reprendre, prennent naturellement l'allure à laquelle eux ou leurs ancêtres ont abandonné ce genre de locomotion. La suppression des réflexes antéro-postérieurs dans les allures marchées irrégulières est bien prouvée par le fait que dans ces allures il n'y a pas de relation constante entre les mouvements des antérieurs et ceux des postérieurs.

accion avec un postérieur permet à l'animal, grâce à la propulsion de ces deux membres unis dans l'action, d'obtenir les deux premières allures sautées : le trot sauté et l'amble sauté.

Dans les premières allures sautées (1), trot et amble, les animaux sont arrivés à obtenir un temps de suspension grâce à la propulsion d'un bipède antéro-postérieur; dans le galop en trois temps un des bipèdes antéro-postérieur se désunit, si l'on veut voir des réflexes antéro-postérieurs dans cette allure il faut admettre qu'un mouvement exécuté par un antérieur est reproduit par un antérieur et un postérieur et qu'enfin le dernier postérieur reproduit seul le mouvement de ces deux membres.

Dans le galop de course l'autre bipède diagonal (galop transverse) ou latéral (galop rotatoire) se désunit à son tour et les antérieurs au cours de l'évolution laissent petit à petit les postérieurs devenir les uniques agents de propulsion, ce fait bien facile à noter est fait pour confirmer l'opinion que les postérieurs ne sont déjà plus tributaires des impressions cinesthésiques des antérieurs.

Cette évolution se produit ainsi : tandis que dans les galops de course (transverse et rotatoire) forme primaire il y a un temps de suspension produit par les quatre membres; dans ceux de la forme secondaire il y en a deux, un produit par les antérieurs l'autre par les postérieurs, dans les galops de course de la forme tertiaire il n'y a de nouveau qu'un seul temps de suspension produit par les postérieurs les membres antérieurs ne touchent terre que pour la forme, ils cessent de se poser au sol dans le ricochet. Au cours de cette évolution, celui des antérieurs et des postérieurs qui est attardé dans l'action n'étant plus retardé, pour l'exécution du réflexe, comme dans les allures marchées par la nécessité de rester à l'appui durant le temps de suspension de

(1) Suivant l'habitude admise je continue à appeler allures sautées toutes celles qui comportent un temps de suspension, dans l'espace, de la masse totale mais je crois bon de faire remarquer que si cette expression est juste quand elle s'applique aux plus évoluées de ces allures il n'en est pas de même quand elle est appliquée aux moins évolnées; dans ces dernières il n'y a pas à proprement parler de projection particulière qui mérite le nom de saut étant donné que dans ces allures, déjà rapides, la force d'inertie implique la continuation du déplacement de la masse dans la direction donnée, ce qui empêche la chute immédiate de la masse au sol, ce dont l'animal profite pour anticiper le lever du membre à l'appui au poser du membre qui est au soutien. Ceci est un autre exemple du fait que l'évolution des allures n'est pas en général autre chose que la répétition de plus en plus rapide des impressions cinesthésiques au fur et à mesure que les causes qui attardent cette répétition disparaissent.

son congénère, active de plus en plus la répétition des impressions cinesthésiques produites par son congénère; il les reproduit, dès que l'animal prend le galop, avec une seule période de retard. Au cours de la fin de l'évolution des galops de course le membre attardé diminue encore plus progressivement ce retard jusqu'à ce que dans le ricochet le postérieur attardé (les antérieurs ne touchent plus le sol) arrive à exécuter le mouvement presque en même temps que son congénère.

En *résumé* toute cette série d'observations vient confirmer l'explication du docteur Morat à savoir que les informations cinesthésiques de mouvements ou groupes de mouvements peuvent être utilisées pour leur reproduction aussitôt que cela est possible.

Fig. 4. — Galop transverse, première forme, avec un désaccord d'une période entre les congénères. (D'après une photographie instantanée.)

Cette reproduction très retardée dans les allures reptiliennes par la nécessité où sont les membres de constituer à l'animal des bases quadrupédales et tripédales ne l'est plus, dans la première des allures marchées, que de trois périodes pour le congénère du membre qui a transmis l'information et de deux pour le postérieur latéralement opposé.

Dès la première allure reptilienne jusqu'au pas pithécoide, première allure marchée, le réflexe antéro-postérieur a été latéral pour tous les animaux qui ont suivi ce phylum évolutif.

A partir de cette allure il semble que l'animal peut supprimer le réflexe antéro-postérieur, comme parait le prouver le fait que l'avance

constante que prend l'antérieur, au cours de l'évolution des allures marchées qui suivent, n'a aucune répercussion sur le mouvement des postérieurs.

Cette avance se produit au cours des allures irrégulières et reste stationnaire dans les allures régulières.

Un réflexe antéro-postérieur diagonal peut se créer au cours de cette évolution pour les animaux qui se détiennent dans des allures comprenant uniquement des successions antéro-postérieures diagonales de levers.

Donc dans les allures marchées le groupe de mouvement le plus

Fig. 5. — Kanguroo au ricochet

réduit reproduit comporte deux périodes. Au cours de l'évolution des galops ce groupe se réduit à une période puis à une fraction de période, laquelle se réduit de plus en plus.

Quand l'animal a adopté le ricochet il est difficile de déterminer si les membres congénères deviennent à leur tour indépendants l'un de l'autre au point de vue réflexe reproduisant chacun son propre réflexe ou s'ils arrivent à reproduire une fraction complètement infime du mouvement du congénère, ce qui me fait opter pour cette dernière supposition est le fait qu'un des postérieurs conserve toujours une très légère avance sur l'autre, cette avance est si infime qu'elle est difficile à noter mais enfin elle existe.

Je ne crois pas qu'il eut été possible de reconstituer la phylogénie de la locomotion des vertébrés, sur la seule base de ce que l'on savait

des réflexes nerveux (1); j'ai rétabli cette phylogénie grâce à l'observation d'après nature des allures et leur classification à posteriori au moyen de leur relation entre elles créant sur la même base les allures intermédiaires qui manquaient. Ces déductions ont dû être justes puisque, à posteriori, toutes ces allures reconstituées se sont trouvées exister.

La phylogénie reconstituée, il devenait possible d'observer en elle le jeu des réflexes et cette observation a donné un résultat qui semble confirmer l'explication donnée à leur sujet par le docteur Morat. La grande loi qui parait avoir régi l'évolution de la locomotion semble être la répétition de plus en plus rapide des impressions cinesthésiques au fur et à mesure que les empêchements à leur répétition immédiate disparaissaient. Un fait semble être mis en évidence par ces observations : la création de nouveaux réflexes par l'habitude, quand l'habitude a créé des réflexes entre congénéres l'animal semble pouvoir, par un acte de volonté, supprimer le réflexe antéro-postérieur d'où l'apparition des allures irrégulières, et quand ayant obtenu une nouvelle allure à bases commodes l'animal se met à l'employer normalement, cet usage constant semble créer de nouveaux réflexes antéro-postérieurs (2) qui assurent la régularité de la dite allure.

C'est la survivance de ces réflexes, tant que d'autres ne sont pas créés par l'emploi de nouvelles allures quadrupédales, qui expliquerait pourquoi un animal qui abandonne la locomotion quadrupédale pour la bipédale, s'il est obligé à reprendre la première, emploie, tout naturellement, l'allure au cours de laquelle il l'a abandonnée.

Donc la grande loi qui régit la locomotion est celle même qui régit les réflexes, mais interviennent avec elle, pour déterminer les lois secondaires de cette évolution, deux autres facteurs : l'éducabilité du reflexe et les lois qui régissent l'élimination des empêchements à la reproduction rapide des impressions cinesthésiques. Enfin il faut aussi tenir compte qu'en cette évolution, interviennent certains actes conocients.

(1) Dans un travail intitulé *El dinamismo especifico*, que je regrette de n'avoir pas connu avant de rédacter celui-ci, le docteur Rodolfo Senet envisage le rôle des réflexes dans l'évolution générale des êtres.

(2) Ces réflexes peuvent être différents de ceux qui les ont précédés soit parce qu'ils sont diagonaux au lieu d'être latéraux (ou vice-versa), soit aussi parce qu'ils se répétent plus ou moins rapidement.

BIBLIOGRAPHIE

Cope (E. D.), *On catagenesis,* in *Am. Ass. for the Adv. of Science,* Philadelphia Meeting, XXXIII. Un vol. of Proced., pp. 445-479.

Goubaux et Barrier, *L'extérieur du cheval,* Paris, 1890.

Gregory (Dr. W. K.), *The Upright posture of man. Proc. of the Am. Phil. Society,* vol. LXXVII, nº 4, 1928.

Lenoble du Teil, *Les allures du cheval,* Paris, 1893.

Lesbre (X.), *Precis d'extérieur du cheval,* Paris, 1920.

Magne de la Croix (P.), *Filogenia de las locomociones cuadrupedal y bipedal,* en *An. de la Soc. Cient. Arg.,* tomo CVIII, págs. 383-406, Buenos Aires, 1929.

— *Andares irregulares o transitorios,* en *Physis,* tomo X, págs. 99-108.

— *La marche quadrupédale du chimpanzé et de l'homme,* en *An. de la Soc. Cient. Arg.,* tomo CX, págs. 393-399, fig. 6.

— *De la instantaneidad del cambio de apoyo,* en publicación en la *Revista de la Sociedad de Medicina Veterinaria.*

Marey (E. J.), *La machine animale,* Baillière, Paris, 1878.

Morat et Doyon, *Traité de physiologie,* Masson, Paris, 1878.

Pettigrew (J. Bell), *La locomotion chez les animaux,* Alcan, Paris, 1887.

Raabe, *Théorie raisonnée de l'école du cavalier* — chez l'auteur, Paris, 1870.

Senet (R.), *El dinamismo específico, causas y leyes de la evolución,* en *Humanidades,* tomo VIII, págs. 111-199, Buenos Aires.

Weber (Eduard und Willam), *Die Mechanik der menschlichen gehwerkreuge,* Göttinger, 1836.

NOTAS BOTÁNICAS

(SÉPTIMA SERIE)

Por JOSÉ F. MOLFINO

RÉSUMÉ

Notes botaniques (septième série). — L'auteur continue, dans ce dénombrement, les séries de déterminations produites par lui sur des plantes offrant un intérêt aux études floristiques argentines. Les séries I à VI ont paru dans *Physis* (Revue de la Société Argentine de Sciences Naturelles), tomes VI à IX.

DICOTYLEDONEAE

Piperaceae

1. *Peperomia cyclaminoides* A. W. Hill. — A. W. Hill in Fedde, *Repertorium,* V (1908), p. 350.

Salta : Río Pescado, leg. C. Spegazzini, III-1905. — Herbario del Ministerio de Agricultura.

Obs. El tipo procede de Tarija (Bolivia) y fué coleccionado por Carlos Fiebrig, bajo el número 2488, con el cual he tenido oportunidad de comparar el material que aquí cito por vez primera para el país.

2. *Peperomia urocarpa* Fisch. et Mey. — H. Dahlstedt, *Studien über sud und Centralamerikanische Peperomien* (1900), p. 81, tab. II, fig. 23.

Misiones : San Javier (entre piedras, en lugar húmedo), leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herbario del Instituto de Botánica y Farmacología.

Moraceae

3. *Ficus eximia* Schott, var. *glabra* (Vell.) Hassl. — Hassler, *Moracearum paraguariensium conspectus* (1919), p. 16 et 17.

Misiones : Yerbal Viejo, leg. C. Spegazzini, II-1907. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

4. *Ficus Monckii* Hassl. — Hassler, *op. cit.*, p. 19.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Isla de Martín García, epífita sobre « seibo », leg. J. F. Molfino, III-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

5. *Ficus Rojasii* Hassl. — Hassler, *op. cit.*, p. 17.

Misiones : Campo Grande, leg. C. Spegazzini, II-1907. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Capparidaceae

6. *Cleome aculeata* L. — Eichler in Martius, *Flora brasiliensis*, XIII, 1 (1865), p. 259, tab. 58, fig. 2.

Misiones : Posadas, *in arvis*, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

7. *Cleome gigantea* L. — Hauman, *Notes floristiques*, II (1925), pp. 463-465.

Misiones : Campiñas de Américo, leg. C. Spegazzini, III-1907. — Herb. Minist. Agricultura.

Misiones : Iguazú, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Salta : Bobadal, leg. C. Spegazzini, III-1905. — Herb. Minist. Agricultura.

Salta : Yuto, leg. P. Jörgensen-Hansen, III-1911. — Herb. Minist. Agricultura.

8. *Cleome flexuosa* Gris. — Grisebach, *Plantae Lorentzianae* (1874), p. 25.

Chaco : Río Bermejo, sección 17, leg. A. Flossdorf, XI-1906. — Herb. Minist. Agricultura.

Salta : Orán, leg. C. Spegazzini, 26-III-1906. — Herb. Minist. Agricultura.

9. *Cleome paludosa* Willd., var. *brevipes* Haum. — Hauman, *op. cit.*, pp. 464-466.

Salta : Orán, leg. C. Spegazzini, 26-III-1905. — Herb. Minist. Agricultura.

Formosa, en monte, leg. E. Kermes, 22-XI-1900, nº 378. — Herb. Minist. Agricultura.

10. *Cleome psoraleifolia* DC. — Hauman, *op. cit.,* pp. 464 465.

Misiones : Puerto Pampa, leg. E. Kermes, 9-IV-1901, nº 185. — Herb. Minist. Agricultura.

Leguminosae

11. *Copaifera Langsdorffii* Desf. — Bentham in Martius, *Flora brasiliensis,* XV, 2 (1870), p. 242, tab. 63, fig. 1.

Misiones : San Ignacio, leg. A. A. Muniez, X-1919. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Iguazú, leg. F. E. Devoto, I-1926. — Herb. Minist. Agricultura.

12. *Bauhinia Langsdorffiana* Bong. — Bentham in Martius, *op. cit.,* p. 204.

Misiones : Loreto, trepadora, leg. F. M. Rodríguez, 3-V-1910, nº 334; n. v. « caí-escalera ». — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

13. *Dioclea paraguariensis* Hassl. — Hassler in Fedde, *Repertorium,* XVI (1919-20), p. 228.

Misiones : Puerto León, leg. S. Venturi, año 1909. — Herb. Minist. Agricultura.

Obs. A esta especie debe referirse el material sin frutos, publicado por mí en *Notas botánicas,* serie III, como *Cymbosema roseum* Benth.

14. *Discolobium leptophyllum* Benth., var. *junceum* (Micheli) Hassl. — Bentham in Martius, *op. cit.,* XV, 1 (1859-62), p. 72. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* VIII (1910), p. 126.

Chaco : Colonia Benítez, leg. A. G. Schultz, X-1929. — Herb. Minist. Agricultura.

15. *Discolobium pulchellum* Benth., var. *viscossisimum* Hassl. — Bentham in Martius, *op. cit.,* XV, 1, p. 73, tab. 17, fig. 1. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* p. 125.

Chaco : Colonia Benítez, leg. A. G. Schulz, X-1929. — Herb. Minist. Agricultura.

16. *Clitoria nana* Benth., var. *caaguazuensis* Hassl. — Bentham in Martius, *op. cit.,* XV, 1, p. 120. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* VIII (1910), p. 128.

Misiones : Apóstoles, campo seco, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

17. *Eriosema rotundifolium* Mich. — Micheli, *Contr. Flor. Parag.*, I, p. 35, tab. 12.

Corrientes : Bellavista, leg. N. Rojas Acosta, julio de 1905. — Herb. Minist. Agricultura.

Misiones : Posadas, en campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

18. *Ferreirea spectabilis* Allem. — Bentham in Martius, *op. cit.*, XV, 1, p. 311. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XVI (1920), p. 231.

Misiones : Campo Grande, leg. C. Spegazzini, II-1907; ejemplar estéril. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Es una de las especies gigantes de la floresta paraguaya, muy rara, seguramente, en Misiones, de donde no se conocía hasta ahora.

19. *Galactia macrophylla* (Benth.) Taub. — Taubert in Engler und Prantl, *Pflanzenfamilien*, III, 3 (1891), p. 368.

Misiones : Bonpland, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Santa Ana, leg. A. de Llamas, 1901, nº 499; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

20. *Galactia speciosa* Britt., var. *acutisepala* Hassl., forma *paraguariensis* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, VIII (1910), p. 126.

Misiones : Posadas, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

21. *Galactia stenophylla* Hook. et Arn., var. *intermedia* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 127.

Misiones : Posadas, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

22. *Galactia decumbens* (Benth.) Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XVI (1920), p. 228.

Misiones : San Ignacio, terrenos secos, leg. A. A. Muniez, X-1919, nº 67. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Loreto, campos pedregosos, leg. G. Grüner, 15-IX-1930, nº 277. — Herb. Minist. Agricultura.

23. *Galactia glaucophylla* Harms. — O. Kuntze, *Revisio generum*, III (1893), p. 64. — Harms in Fedde, *Repertorium*, XIX (1923-1924), p. 17.

San Luis : Quines, leg. L. F. Delétang, verano de 1923. — Herb. Inst. y Farmacología.

Córdoba : Villa Dolores, leg. J. F. Molfino, febrero de 1921. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Arriba : legumbre de *Hymenaea stigonocarpa* Mart.; debajo : legumbre abierta de *Dioclea paraguariensis* Hassl. (Algo reducidas.) Foto Bruch

24. *Hymenaea stilbocarpa* Hayne. — Bentham in Martius, *op. cit.*, XV, 2, p. 235.

Misiones : Campo Grande, leg. C. Spegazzini, 1-1907. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. En las colecciones del Instituto, se encuentra una legumbre de *Hymenaea stigonocarpa* Mart., cuya fotografía ofrezco, que fué coleccionada, según el respectivo rótulo, en Misiones, por el señor J. Sierra; pero, dudo sobre la exactitud de esta procedencia.

25. *Tephrosia Hassleri* Chod. — Chodat in Chodat et Hassler, *Plantae Hasslerianae,* II, p. 442.

Misiones : Loreto, leg. A. A. Muniez, XI-1908. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

26. *Tephrosia nervosa* Chod. et Hassl. — Chodat et Hassler, *op. cit.*, p. 441.

Misiones : Bonpland, leg. P. Jörgensen-Hansen, XI-1909. — Herb. Minist. Agricultura.

Geraniaceae

27. *Geranium albicans* St.-Hil. — R. Knuth, in *Pflanzenreich,* IV, 129 (1912), p. 73.

Misiones : San Ignacio, leg. H. Quiroga, VIII-1913. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

28. *Geranium album* R. Knuth. — R. Knuth, *op. cit.*, p. 148.

Salta : Orán, leg. F. M. Rodríguez. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

29. *Geranium arachnoideum* St.-Hil. — R. Knuth, *op. cit.*, p. 149.

Misiones : San Ignacio, leg. H. Quiroga, VIII-1913. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Umbelliferae

30. *Apium Sellowianum* Wolff. — Wolff, in *Pflanzenreich,* IV, 228 (1927), p. 30.

Buenos Aires : Luján, leg. J. F. Molfino, XI-1919. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Buenos Aires : La Plata, leg. J. F. Molfino, X-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Santa Fe : Rufino, leg. C. Spegazzini, I-1900. — Herb. Minist. Agricultura.

Obs. Elemento de la Pradera pampeana que caracteriza a los suelos algo salados y húmedos.

31. *Eryngium Balansae* Wolff. — Wolff, in *Pflanzenreich,* IV, 228 (1913), p. 246.

Misiones : Bonpland, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Hydrophyllaceae

32. *Phacelia boliviana* Brand. — Brand, in *Pflanzenreich,* IV, 251 (1913), p. 77.

Jujuy : Tumbaya, a los 2500 metros, leg. M. Medinacely. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Asclepiadaceae

33. *Morrenia Hassleriana* Malme. — Malme in Fedde, *Repertorium,* VI (1909), p. 346.

Chaco : Colonia Benítez, leg. A. G. Schulz, X-1929. — Herb. Minist. Agricultura.

34. *Oxypetalum Kingii* S. Moore. — S. Moore, *The Journal of Botany* (1929).

Mendoza : Cordillera del Tigre, Quebrada Chacay, alt. 2200 metros, leg. D. O. King, 10-XII-1927, nº 347. — Herb. Minist. de Agricultura. Cotipo!
San Juan : Cordillera del Espinacito, leg. W. Bondenbender, verano de 1897. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Labiatae

35. *Cunila incisa* Benth. — Schmidt in Martius, *Flora brasiliensis,* VIII, 1 (1858), p. 165.

Misiones : Loreto, leg. A. A. Muniez, 24-IX-1919, nº 17 pp. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

36. *Eriope trichopoda* Briq. — Briquet in Micheli, *Contr. Flor. Paraguay,* VII, p. 17, tab. 57.

Misiones : Posadas, orilla del Paraná, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Inst. Bot. y Farmacología.

37. *Glechon thymoides* Spreng. — Schmidt in Martius, *op. cit.,* p. 176.

Misiones : Concepción de la Sierra, en campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

38. *Hedeoma scutellarioides* (Benth.) Briq. — Briquet, in *Pflanzenfamilien,* IV, 3 (1897), p. 294.

Misiones : San Javier, leg. C. Burmeister, 1901. — Herb. Minist. Agricultura.

39. *Leonotis nepetifolia* (L.) R. Brown. — Schmidt in Martius, *op. cit.,* p. 200.

Misiones : Posadas, leg. A. A. Muniez, X-1911, nº 48; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, leg. I. C. Vattuone-A. Bianchi L., 22-II-1914, nº 39; n. v. « cordón de fraile ». — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : San José, orilla de camino, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Entre Ríos : isla frente a Concepción del Uruguay, leg. J. R. Báez, I-1918; det. Hauman. — Herb. Museo Hist. Nat. Bs. Aires.

República del Uruguay : Paysandú, leg. doctor J. Schröder. — Ex herb. C. Osten, nº 16.670. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

40. *Leonurus sibiricus* L. — Schmidt in Martius, *op. cit.,* p. 196.

Misiones : Posadas, leg. A. A. Muniez, X-1911, nº 69; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Santa Fe : Puerto del mismo nombre, leg. J. F. Molfino, IV-1920. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Tucumán : Quebrada de Lules, leg. L. R. Parodi, 13-VIII-1923, nº 5293. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Córdoba : Sampacho (F. C. P.), en la playa de la estación, leg. D. O. King, nº 467. — Herb. Minist. Agricultura.

41. *Salvia ambigens* Briq. — Briquet in Micheli, *Contr. Flor Paraguay,* VII, p. 8, tab. 55, fig. 1.

Misiones : San Ignacio, leg. H. Quiroga, 3-XI-1913. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

42. *Salvia cineraroides* Briq. — Briquet in Micheli, *op. cit.,* p. 11, tab. 56, fig. 1.

Misiones : Posadas, en campo, leg. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Un ejemplar de esta especie, recogido por los doctores Vattuone y Bianchi, en San Ignacio (Misiones), durante el verano de 1914, corresponde bien a la forma *approximatta* Briquet (*Plantae Hasslerianae,* II, pág. 659).

43. *Salvia lachnostachys* Benth. — Schmidt in Martius, *op. cit.,* p. 185.

Misiones : Posadas a San José, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

44. *Salvia guaranitica* St.-Hil. — Schmidt in Martius, *op. cit.*, p. 194.

Misiones : Apóstoles, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

45. *Salvia uruguayensis* St.-Hil. — Schmidt in Martius, *op. cit.*, p. 194.

Misiones : San Javier, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

46. *Salvia rigida* Benth. — Schmidt in Martius, *op. cit.*, p. 186.

Misiones : San José, campo duro, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Mi espécimen corresponde, sin duda, a la forma *media* Briquet *(Plantae Hasslerianae,* II, pág. 663).

47. *Salvia Rojasii* Briq. — Briquet, in *Plantae Hasslerianae,* II, p. 660.

Formosa : Misión franciscana de Laishi, XII-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

48. *Salvia scytinophylla* Briq. — Briquet in Chodat et Hassler, *op. cit.*, p. 605.

Misiones : San Javier, *ad ripas fl. Uruguay,* leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

49. *Scutellaria platensis* Speg. (= *Scutellaria Rojasii* Briquet, in *Plantae Hasslerianae,* II, p. 600). — Spegazzini, in *Comunicaciones del Museo Nacional de Buenos Aires,* I (1901), p. 320.

Formosa : Misión franciscana de Laishi, XII-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Salta : Orán, leg. C. Spegazzini, III-1906. — Herb. Minist. Agricultura.

Buenos Aires : Punta Lara, sobre el Río de la Plata, leg. J. F. Molfino, XI-1918. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Solanaceae

50. *Acnistus breviflorus* Sendtn. — Sendtner in Martius, *Flora brasiliensis,* X (1846), p. 152.

Misiones : San Ignacio, leg. A. A. Muniez, 15-X-1919, nº 51. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

51. *Bouchetia erecta* DC. — Dunal in De Candolle, *Prodromus,* XIII, 1 (1852), p. 589. — Hassler in Fedde, *Repertorium,* XV (1919), p. 244.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Chaco : Fortín Expedición, margen derecha del río Bermejo, leg. Eric Boman, 7-V-1889. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Chaco : Colonia Benítez, leg. A. C. Muello, I-1917. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

52. *Brunfelsia uniflora* (Pohl) Don. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* p. 243.

Misiones : San Ignacio, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Chaco : Fontana, leg. T. Meyer, VIII-1928, nº 166. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Hassler ha distinguido varias formas; nuestras plantas se aproximan a la forma *typica.*

53. *Cestrum intermedium* Sendtn. — Sendtner in Martius, *op. cit.,* p. 221.

Misiones : Puerto Aguirre, montes ribereños, leg. T. Rojas, 27-IX-1922, nº 4482; « árbol de 6 a 8 metros »; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farcología.

Misiones : San Javier, bosquecillo ribereño, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

54. *Lycium Morongii* Britt., var. *typicum* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* p. 241.

Chaco : Colonia Benítez, leg. A. C. Muello, I-1917. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Corrientes : en las cercanías de la ciudad del mismo nombre; ex herbario del Museo Educacional. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

55. *Lycium chilense* Bert., subsp. *paraguariense* Hassl., var. *normale* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* p. 240.

Chaco : Colonia Benítez, A. C. Muello, I-1917. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

56. *Solanum aridum* Morong. — Morong, in *Ann. New York Acad. Sc.,* VII (1893), p. 173.

Chaco : Nueva Pompeya, leg. A. Flossdorf, 14-XI-1906, nº 88; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Chaco : Charata, leg. J. Bosq, XII-1924. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

57. *Solanum Balansae* Hassl., var. *ambiguum* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 234 et 236.

Misiones : Loreto, campos secos, leg. F. M. Rodríguez, 18-III-1910, nº 197; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, lugar seco, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

58. *Solanum citrifolium* Willd., var. *typicum* Hassl. — Sendtner in Martius, *op. cit.*, p. 44. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 218.

Misiones : Puerto Irigoyen, montes ribereños, leg. T. Rojas, 9-XI-1922, nº 4610; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Yerbal Viejo, leg. W. Koutché, I-1927. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. En Misiones (Puerto Aguirre), existe también la variedad *leucodendron* (Sendtn.) Hassler, de esta especie. Así me lo dice el número 8263 del Herbario Osten, que he tenido oportunidad de ver.

59. *Solanum bonariense* L., var. *villaricense* (Mor.) Chod. — Chodat, *La végétation du Paraguay*, I (1916), p. 75.

Misiones : Santa Ana, campos secos, leg. F. M. Rodríguez, 4-III-1910, nº 198. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. En Misiones existe, asimismo, la variedad *paraguayense* Chodat, *l. c.*, página 75 (Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922).

60. *Solanum chacoënse* Bitt. — Bitter in Fedde, *Repertorium*, XI (1913), p. 18. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 224. — Hassler, in *Annuaire du Conservatoire et Jardin botaniques de Génève*, XX, p. 185.

Córdoba, leg. Carlos Spegazzini, XII-1887. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Buenos Aires : La Plata, leg. Carlos Spegazzini, III-1886. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, campo húmedo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

61. *Solanum Convolvulus* Sendtn. — Sendtner in Martius, *op. cit.*, p. 48.

Misiones : Campiñas de Américo, lugar seco, leg. C. Spegazzini, III-1907. — Herb. Minist. Agricultura.

62. *Solanum ciliatum* Lam. — Dunal in De Candolle, *op. cit.*, p. 241.

Misiones : Posadas, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

63. *Solanum curtipes* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.*, XI (1913), p. 228. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XV (1919), p. 228.

Misiones : Iguazú, borde de bosque, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

64. *Solanum diflorum* Vell. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XV (1919), p. 222.

Misiones : Posadas, campo seco, leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Según Hassler, *op. cit.*, esta vieja especie correspondería a una subespecie del mismo nombre, y a la variedad *typicum* Hassler, de *Solanum pseudocapsicum* L., cuya descripción original él amplía, estableciendo, al mismo tiempo, sinonimias y divisiones. Con numerosos ejemplares a la vista, la aplicación del sistema y la identificación de las formas descritas por el insigne botánico de San Bernardino, resultará una tarea mucho más fácil y menos penosa para el futuro investigador de tan intricado género. Por esta razón mantengo el dictamen indicado, fundado en la descripción original.

65. *Solanum foetidum* R. et Pav. — Dunal in De Candolle, *op. cit.*, p. 147. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XV (1919), p. 114.

Chaco Salteño : Río Bermejo, leg. C. Calcagnini, VII-1902, n° 100. — Herb. Minist. Agricultura.

66. *Solanum incarceratum* R. et Pav. — Ruiz et Pavon, *Flora peruviana et chilensis*, II (1799), p. 40, tab. 176. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 239.

Formosa : en cultivo de la Misión franciscana de Laishi. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Corrientes, norte de la provincia, enviado como maleza de cultivo por la seccional de la Defensa agrícola, verano de 1923 ; det. Spegazzini. — Herb. Minist. Agricultura.

67. *Solanum hirtellum* (Spreng.) Hassl., var. *diminutum* Bitt. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, p. 218.

Misiones : Santa Ana, leg. A. de Llamas, 1901, n° 289; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Iguazú, interior de bosque, leg. F. M. Rodríguez, 19-X-1910, nº 420. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Puerto Irigoyen, leg. T. Rojas, XI-1922, nº 3574. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

68. *Solanum incisum* Gris. — Grisebach, *Symbol. ad flor. argent.* (1879), p. 251.

Catamarca : Pomán, leg. P. L. Spegazzini, 1910. — Herb. Minist. Agricultura.

69. *Solanum Ipomoea* Sendtn. — Sendtner in Martius, *op. cit.*, p. 50.

Misiones : Barracón, leg. C. Spegazzini, II-1907. — Herb. Minist. Agricultura.

Obs. El ejemplar se aproxima a la variedad *macrostachyum* Hassler (Fedde, *Repertorium,* XV, p. 120).

70. *Solanum multispinum* N. E. Brown. — N. E. Brown, in *Transact. and Proceed. Botan. Soc. Edinburg* (1893), p. 65. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* XV, p. 234 et XI, p. 117.

Formosa : Misión franciscana de Laishi, XII-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

71. *Solanum Neves-Armondii* Dus. — Dusén, in *Arkiv Bot. Stockh.,* VIII, 7, p. 15.

Misiones : Campiñas de Américo, leg. C. Spegazzini, III-1907. — Herb. Minist. Agricultura.

72. *Solanum olympicum* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* IX (1911), p. 116.

Formosa : Misión franciscana de Laishi, XII-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

73. *Solanum palinacanthum* Dun. — Dunal in De Candolle, *op. cit.*, p. 245.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : San Ignacio, leg. H. Quiroga, 17-IX-1912; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Iguazú, leg. T. Rojas, 13-IX-1915; ex herb. Osten, nº 8267. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Corrientes : Ituzaingó; ex herb. del Museo Educacional. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

74. *Solanun pilcomayense* Morong. — Morong, in *Ann. New York Acad. Scienc.,* VII (1893), p. 177.

Buenos Aires : Campana, pajonal de la costa, leg. J. F. Molfino, XII-1920. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

75. *Solanum pseudo-lycioides* Chod. et Hassl. — Chodat et Hassler, *Plantae Hasslerianae,* II, p. 316. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* XV (1919), p. 219.

Misiones : Ignazú, leg. F. E. Devoto, I-1926. — Herb. Minist. Agricultura.

76. *Solanum Rantonnetti* Carr. — Bitter in Fedde, *op. cit.,* XII (1913), p. 458. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* XV (1919), p. 219.

Misiones : Santa Ana, leg. A. de Llamas, 1901, nos 513 y 668; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Bonpland, campos secos, leg. F. M. Rodríguez, 6-V-1910, n° 343. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Esta especie se cultiva en el Jardín Botánico Municipal bonaerense.

77. *Solanun ramulosum* Sendtn. — Sendtner in Martius, *op. cit.,* p. 45.

Misiones : San Ignacio, orilla de monte, leg. H. Quiroga, 17-IX-1913; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Bonpland, leg. P. Jörgensen-Hansen, 1909. — Herb. Minist. Agricultura.

78. *Solanun robustum* Wendl., var. *laxepilosum* Hassl. — Sendtner in Martius, *op. cit.,* p. 72. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* p. 237.

Misiones : Picada de Bonpland, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

79. *Solanum riojense* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.,* XI (1913), p. 481.

La Rioja : cercanías de la ciudad del mismo nombre, leg. Giacomelli. — Herb. Minist. Agricultura.

La Rioja : Famatina, leg. P. Bustamante, XI-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

80. *Solanum sarachidium* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.,* XI (1913), p. 211.

Formosa : ex herb. Misión franciscana de Laishi. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

81. *Solanum sarachioides* Rusby. — Rusby, in *Bull. New York Bot. Gard.*, IV (1907), p. 420.

Salta : Bobadal, leg. C. Spegazzini, ver. 1906. — Herb. Minist. Agricultura.

82. *Solanum sarachoides* Sendtn. — Sendtner in Martius, *op. cit.*, p. 18. — Bitter in Fedde, *op. cit.*, XI, p. 208. — Polgár, in *Zeitschr. Ungarische Bot. Blatt.*, Jahrg., 1918, heft $^1/_2$, p. 33, tab. I.

Buenos Aires : diversas localidades de los alrededores de la ciudad. — Herb. Inst. Bot. y Farmacologia.

Obs. Esta especie de *Solanum* es relativamente común en la Pradera pampeana; es planta molesta para los cultivos, especialmente de lino.

83. *Solanum setulosistylum* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.*, XII (1913), p. 450.

Salta : Pampa Grande, leg. C. Spegazzini, I-1897. — Herb. Minist. Agricultura.

84. *Solanum simplicifolium* Bitt., var. *mollifrons* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.*, XI, p. 369 et XII, p. 445.

Salta : Pampa Grande, leg. C. Spegazzini, I-1897. — Herb. Minist. Agricultura.

85. *Solanum sisymbriifolium* Lam. — Dunal in De Candolle, *op. cit.*, p. 326.

Misiones : Santa Ana, campos secos, leg. F. M. Rodríguez, 2-III-1910, nº 196. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, terrenos secos, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

86. *Solanum Spegazzinii* Bitt. — Bitter in Fedde, *op. cit.*, XII (1913). p. 449.

Salta : Amblaio-Cachipampa, leg. C. Spegazzini, I-1897. — Herb. Minist. Agricultura.

87. *Solanum torvum* Sw., subsp. *brasiliense* (Sendtn.) Hassl., var. *genuinum* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.*, XV (1919), p. 230. — Sendtner in Martius, *op. cit.*, p. 94.

Misiones : Puerto Aguirre, leg. F. E. Devoto, I-1926. — Herb. Minist. Agricultura.

88. *Solanum turnerioides* Chod. — Chodat, *Plantae Hasslerianae,* I, p. 193.

Misiones : San José, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

89. *Solanum viarum* Dun. — Dunal in De Candolle, *op. cit.,* p. 240.

Misiones : Santa Ana, campos secos, leg. F. M. Rodríguez, 12-III-1910, n° 200; det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Misiones : Posadas, campo seco, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

90. *Solanum violaefolium* Schott, var. *asarifolium* (Kth. et Bouché) Hassl., forma *decadontum* Hassl. — Hassler in Fedde, *op. cit.,* XV (1919), p. 220.

Formosa : Misión franciscana de Laishi, XII-1923. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. He visto florecida a esta especie, en la barranca cercana a Puerto Bertoni, en el Alto Paraná (Paraguay).

91. *Solanum viridipes* Dun. — Dunal in De Candolle, *op. cit.,* p. 234.

Misiones : Puerto Iguazú (río Paraná), leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Obs. Este ejemplar correspondería a la variedad *intermedium* Hassler (Fedde, *Repertorium,* XV, p. 239), pero no ofrece todas las características que allí se describen.

92. *Solanum flagellare* Sendtn. — Dunal in De Candolle, *op. cit.,* p. 283. — Sendtn. in Martius, *op. cit.,* p. 68.

Buenos Aires : Campana, pajonal de la costa, leg. J. F. Molfino, XII-1920. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Cucurbitaceae

93. *Siolmatra brasiliensis* (Cogn.) H. Baill. — Cogniaux in De Candolle, *Suites au Prodromus,* III (1881), p. 930, sub *Alsomitra.* — *Pflanzenfamilien,* IV, 5 (1894), p. 392.

Jujuy : Ledesma, leg. C. Spegazzini, I-1906. — Herb. Minist. Agricultura.

94. *Siolmatra paraguayensis* Cogn. — Cogniaux, in *Bull. de l'Herbier Boissier,* I, n° 12, p. 611.

Misiones : San Pedro, leg. C. Spegazzini, II-1907. — Herb. Minist. Agricultura.

Compositae

95. *Aspilia setosa* Gris. — Grisebach, *Symbolae ad flor. argentinam* (1879), p. 192.

Misiones : Apóstoles, campo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

96. *Chuquiraga aurea* Skottsb. — Skottsberg, in *Svensk. Vet. Akad. Handl.,* VI, 5 (1916), p. 325.

Neuquén y Mendoza, leg. O. Asp. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

97. *Chuquiraga glabra* Bak. — Baker in Martius, *Flora brasiliensis,* VI, 3 (1884), p. 363.

Misiones : Posadas, orilla de monte. leg. T. Rojas, 25-XI-1922, n° 4593 ; n. v. « espina del infierno », *frutex semi-scandens;* det. Hassler. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

98. *Isostigma crithmifolium* Less. — Baker in Martius, *op. cit.,* p. 241.

Misiones : Posadas, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

99. *Isostigma speciosum* Less. — Baker in Martius, *op. cit.,* p. 240.

Misiones : Campo entre San Javier y Paggi, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

100. *Echinocephalum latifolium* Gardn. — Baker in Martius, *op. cit.,* p. 230, tab. 59, fig. 1.

Misiones : Posadas, *ad ripas herbidas fl. Paraná,* leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

101. *Piptocarpha Sellowii* (Sch.-Bip.) Bak., var. *Balansiana* Hieron. — Baker in Martius, *op. cit.,* IV, 2, p. 130. — Hieronymus, in *Engler's botanischen Jahrbüchern,* XXII, $^4/_5$ h. (1897), p. 704.

Misiones : Santa Ana, común en el monte, leg. P. Jörgensen-Hansen, XI-1910; det. Lillo-Molfino. — Herb. Minist. Agricultura.

Misiones : San Javier, en bosquecillo, leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

102. *Polymnia silphioides* DC. — Baker in Martius, *op. cit.,* VI, 3, p. 159.

Misiones : Posadas, *in dumeto,* leg. J. F. Molfino, I-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

103. *Porophyllum lanceolatum* DC. — De Candolle, *Prodromus,* V, p. 649. — Baker in Martius, *op. cit.,* p. 282.

Misiones : Posadas, *in ruderis,* leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

104. *Porophyllum ruderale* Cass. — Baker in Martius, *op. cit.,* VI, III, p. 282.

Misiones : Posadas, *in dumeto,* leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

105. *Porophyllum platyphyllum* Chod. — Chodat, *Plantae Hasslerianae,* I, p. 168.

Misiones : San Javier, *in dumeto,* leg. J. F. Molfino, II-1922. — Herb. Inst. Bot. y Farmacología.

Buenos Aires, 6 de septiembre de 1930.

BIBLIOGRAFÍA

Celsi, Santiago A., *Estudio de las reacciones químicas de la atropina*. Un folleto (18 × 26), con 142 páginas. Tomás Palumbo, Buenos Aires, 1930.

Se trata de una tesis presentada a la Facultad de Medicina (Doctorado en bioquímica y farmacia) de la Universidad de Buenos Aires. El doctor Celsi hace, en ella, un estudio detallado de las reacciones para identificar la atropina, puntualizando los errores, rectificando las indicaciones bibliográficas, fiscalizando las principales pruebas y señalándolas desde el punto de vista de su especificidad y en su sensibilidad, terminando su trabajo con un estudio interpretativo de algunas reacciones, en particular la de Vitali.

El autor divide la primera parte en cinco capítulos que versan sobre generalidades, reacciones químicas de la atropina, la reacción de Vitali, reacciones diferenciales entre la atropina y los alcaloides parecidos y reacciones microquímicas. La segunda parte constituye lo principal de esta tesis. Es un estudio de elevada técnica, en el que el autor hace gala de su maestría en el dominio científico del alcaloide. Es un conjunto de experiencias que divide en tres capítulos, en los cuales estudia : las reacciones generales, algunas reacciones de la atropina y la reacción de Vitali.

Partiendo de una solución madre de sulfato de atropina al 1 por ciento, determina la sensibilidad con el R° Bouchardat (en medio ácido 0gm0000166) ; con el R° Valzer (en medio neutro 0gm0001052) ; con el R° Mayer (en medio neutro 0gm000285) ; con el R° Dragendorff (neutro 0gm00004) ; con el R° Marmé (hasta 0gm0016) ; con el R° Sonnenschein (0gm000033 en medio ácido) ; con el R° Bertrand (en medio neutro 0gm000066) ; y, con el R° Schulze (hasta 0gm0016).

El autor comprueba que el ácido acético no precipita el alcaloide y opina que el olor aromático que se desprende de la reacción de Guliemo, se debe a la acción deshidratante y oxidante del ácido sulfúrico sobre el ácido trópico, formándose ácido fenilacético.

La reacción de Guerbet, para el ácido benzoico, resultó positiva para la atropina, la hiosciamina y la escopolamina. Negativa para la reacción de Möhler. La reacción fluorescente de Flückiger dió resultado negativo. Después de pasar la reacción de Arnold, que resultó positiva utilizando el ácido sulfúrico concentrado y el nitrito de sodio, nitrato de potasio o bien ácido

nítrico concentrado, el autor se interesa de la reacción de Vitali, comprobando, previamente, que la prueba de Wasicky es sensible y aún más característica que la de Vitali.

Las conclusiones que el autor hace de su estudio interpretativo sobre la reacción de Vitali, son :

a) Que esta reacción resulta positiva con 0gm00001 de atropina ;

b) Que si se substituye el KOH o el NaOH por otros álcalis, no aparece la coloración violácea final. Las soluciones acuosas de estos álcalis fuertes (KOH o NaOH), sólo engendran una coloración anaranjada ;

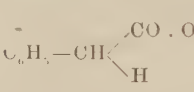
c) Que substituyendo el vehículo de la potasa, por el alcohol amílico, se obtiene una coloración violácea más estable, que las obtenidas por los alcoholes metílico, etílico y propílico ;

d) Que el derivado que produce la coloración violácea, con la potasa alcohólica, es un compuesto dinitrado del ácido aromático, en posición 2-4 fenílica ;

e) Que la acción que ejerce el ácido nítrico en la reacción, es una verdadera nitración ;

f) Que es condición indispensable, para la obtención de la reacción de Vitali, la existencia de la función ester o éter-sal. Que de las dos porciones del ester, tiene una influencia decisiva el ácido trópico o atrópico o α-truxílico (según el alcaloide de que se trata), siendo indiferente la naturaleza del álcali-alcohol combinado con el ácido aromático ;

g) Que la reacción de Vitali resulta positiva, con los éteres de ácidos aromáticos, que responden a la constitución química :



de donde X equivale a un átomo de H o a un radical alkílico cualquiera ;

h) Que la reacción de Vitali resulta negativa con los ácidos aromáticos libres (benzoato de etilo, cinamato de etilo, o-hidrocumarato de etilo y o-oxifenilacetato de etilo) por la existencia de la cadena lateral más frágil, que se quemaría, bajo la acción oxidante del ácido nítrico, mientras en los esteres, el grupo carboxílico al estar bloqueado por la agrupación alkílica, no sería atacado por el ácido nítrico.

Y termina diciendo : « El ensayo de Vitali es negativo con la homotropina y positivo con el fenilglicolato de etilo ; ambas substancias son esteres del ácido fenilglicólico. Deben influir en estos resultados, los restos alkílicos unidos al carboxilo del ácido fenilglicólico en tal forma, como para que en el caso del fenilglicolato de etilo permanezca intacto en grupo funcional del alcohol secundario, mientras que en la atropina el ácido nítrico oxida dicho resto funcional, transformándolo en carbonilo o benzoilfórmico, con lo cual se orientan en posición meta los grupos nitro y se hace imposible la aparición de la coloración violácea. » — *L. V. Floriani.*

ANALES DE LA ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS
FÍSICAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES

RECEPCIONES Y DISTINCIONES

Recepción pública de los doctores Pablo Langevin y Federico Enriques el 25 de agosto de 1928

(Conclusión)

RENSEIGNEMENTS BIOGRAPHIQUES SUR LE PROFESSEUR FEDERIGO ENRIQUES

Il est né à Livourne, le 5 janvier 1871. En 1891, il fut reçu docteur ès-sciences mathématiques à Pise. En 1893-94, nommé professeur de Géométrie Projective et Descriptive à l'Université de Bologne, il a occupé cette chaire jusqu'à 1922 ayant, cette année, été tranféré à l'Université de Rome. En 1896 il obtint la médaille d'or de la Société Italienne des Sciences (dite des XL). En 1906 il fut nommé Membre Correspondant national de l'Académie des Lyncei à Rome. Depuis cette même année, jusqu'à 1913, il fut Président de la Société Philosophique Italienne. En 1906 il fonda la revue *Scientia,* de laquelle il a été codirecteur jusqu'à 1914. En 1907 il obtint le prix Bordin de l'Académie des Sciences de Paris. De 1908 à 1914 il a été membre de la « Commission Internationale pour la Réforme de l'Enseignement Mathématique ». Depuis 1909, il est membre de Conseil Directif (Comité de Redaction des Comptes-Rendus) du « Circolo Matemàtico di Palermo ». En 1909 il obtint le Prix Royal des Lyncei à Rome (10.000 francs à partager avec le professeur T. Levi-Civita de l'Université de Padoue). Cette même année 1909, il fut nommé Membre Correspondant de la Société Mathématique de Kkarkow. Et l'année suivante, 1910, Membre Correspondant de l'Académie Royale de Sciences de Turin. En 1911, il est nommé Président du IVe Congrès International de Philosophie de Bologne; et l'Université de St. Andrews lui décèrne le titre de docteur en droit *honoris causa* (L. L. D.). En 1912 il est nommé Membre de la Société Italienne des Sciences (dite des XL). En 1915 il est nommé Membre Correspondant du « Royal Institut Lombard de Sciences et de Lettres ». De 1919 à 1928 il a été Président de la Société Italienne de Mathématique dite « Mathésis ». En 1921 il devient Directeur de la revue *Periodico di Matemàtica* édité par Zanichelli de Bologne. L'année suivant sa chaire à Bologne est transférée, comme nous l'avons dit plus haut, à Rome pour occuper celle de Géométrie Supérieure.

Depuis 1924 il est Membre du Comité Permanent de la Fédération Internationale des Unions Intellectuelles ; et depuis 1925 il est Membre effectif national de l'Académie des Lyncei, ainsi que Membre Honoraire de la Société Mathématique de Belgique. Cette même année 1925 il a fondé l'École pour l'Histoire des Sciences à l'Université de Rome de laquelle il est Directeur. En 1926 il a été nommé Correspondant de l'Académie Leopoldine-Carolinc de Saxe, ainsi que Président de la Délégation italienne au Congrès de Philosophie de Cambridge (U. S. A.), et l'année suivante (1927) Sociétaire et Président de Section, de la Société Italienne pour le progrès des Science. L'Université du Chili vient, à son tour, de le nommer Professeur Honoraire (1928).

Ajoutons encore qu'il est « Accadèmico benedettino » de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de Bologne ; et Associé Correspondant de l'« Accadèmia Cosentina » (Cosenza). Il a été collaborateur de l'« Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, mit Einschluss ihrer Anwendungen ».

ŒUVRES DE Mr ENRIQUES

1894-1895. *Conferenze di geometria* (cours autographié).

1898. *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, 2e ed., 1904 ; 3e ed., 1909 : actuellement 4e ed.

Se livre à été traduit en allemand sous le titre : *Vorlesungen über projektive Geometrie, Deutsche Ausgabe, von H. Fleischer* Mit einem *Einführungswort von F. Klein* (1 vol. in-8°, XIV + 374 pp. avec 187 figs., Leipzig, Teubner, 1e éd., 1903 ; 2e éd., 1915).

1900. *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, 1. Les chapitres traités par Enriques sont les suivants : Première édition : *Sur l'importance scientifique et didactique des questions relatives aux principes de la géométrie.* Deuxième édition : *Les nombres réels* (pp. 365 à 493 ; *I numeri reali*, Bologna, 1912, in-8°) ; *Sur les équations résolubles par radicaux carrés et sur les polynomes regulièrs qu'on peut construire élémentairement. Quelques observations générales sur les problèmes de géométrie. Maximums et minimums dans l'analyse moderne* (pp. 641 à 795). Troisième édition (1924-7) : *L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque : Point, ligne et surface* (vol. I, pp. 1-20), traduit en français par Maurice Solovine, Gauthier Villars et Cie, 1927, un fascicule in-8° de VIII-48 pp. (25 × 36) ; *Espace et temps dans la critique moderne* (vol. II, pp. 311-459), 1924.

Se dernier livre à été traduit plus tard en allemand sous le titre : *Fragen der Elementargeometrie, Deutsche Ausgabe von Dr. Hermann Fleischer in Königsberg* i. Pr. Teil. II : *Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit* (XII + 348 pp. avec 135 figs. dans le texte, 1907 et 1922). TeilI, *Deutsche Ausgabe von H. Thieme*, Teubner, 1911 et 1923.

1902. *Lezioni di geometria descrittiva,* Bologna (per cura di U. Concina), trois éditions, 1901, 1925.

1903. *Elementi di geometria* (en collaboration avec Ugo Amaldi), Bologna, Zanichelli, 1ᵉ éd., 1903 ; 2ᵉ éd., 1905, avec x + 567 pp. et nombreuses figures dans le texte ; 3ᵉ ed., 1909. Actuellement, le cours complèt de géométrie à l'usage des écoles moyennes comprend : *Elementi di geometria,* 6ᵉ éd., réduite ; *Elementi di geometria* (à l'usage des écoles complémentaires, 1923) ; *Nozioni di geometria* (à l'usage des Gymnases inférieurs) ; *Nozioni intuitive di geometria* (à l'usage des Instituts de Professeurs élémentaires, 1923) ; *Geometria elementale* (avec des exercices, deux tomes, pour les écoles secondaires supérieures), 1921.

1906. *Problemi della sciencia,* Bologna, Zanichelli, 2ᵉ ed., 1927, traduit en allemand sous le titre : *Probleme der Wissenchaft. Deutsch von K. Grelling in Göttingen,* 1908.

1907. *Prinzipien der Geometrie,* Leipzig, 1907. *Les principes de la géométrie* (1911), Paris. *(Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* éditions allemande et française).

1914. *Grundeigenschaften der Algebraischen Flächen. Die algebraischen Flächen vom Gesichtspunkte der birationalen Transformation.* En collaboration avec Mʳ Castelnuovo, dans *Encyclopädie der Math. Wissenschaften* (édition allemande (III, C 6*a* et 6*b*).

1912. *Scienza e razionalismo.* Un volume xv+302 pp., Bologna (Notice dans « Scienza »).

1912-1914. *Questioni riguardanti le matematiche elementari.* (En collaboration). Deux volumes, Bologne, Zanichelli, in-8° ; t. I, viii + 649 pp. ; t. II, vi + 811 pp., 1914.

1924-1926-1927. Troisième édition des *Questioni* en quatre volumes : t. I, ii + 398 pp., 1924 ; t. II, 466 pp., 1925 ; t. III, 608 pp., 1926 ; t. IV, 471 pp., 1927.

1918. *Conferenze di geometria non euclidea,* per cura di Olegario Fernández, Bologna, Zanichelli. (Noticia en *Atti dell'Accad. Pontaniana,* 1918.)

1915-1924. *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche.* (En collaboration avec Oscar Chisini), t. I, in-8°, xiv + 397 pp., Bologna, Zanichelli ; t. II, 1918, 713 pp., íd. ; t. III, xviii + 593 pp., 1924. (Notice en *Atti dell'Accad. Pontaniana,* pp. 53.) *Courbes et fonctions algébriques d'une variable,* traduit par Legaut, un vol. in-8° de 592 pp., Gauthier-Villars et Cⁱᵉ, Paris, 1926.

1922. *Per la storia della logica.* (Notice dans « Scienzia ». Ce livre à été traduit en allemand sous le titre de *Zur Geschichte der Logik und Aufbau der Wissenchaft im Urteil der mathematischen Denker. Deutsch von Bieberbach (Wissenschaft und Hypothese,* XXVI), in-8°, vi + 240 pp., Leipzig et Berlin, B. G. Teubner, 1927.

1926. *Gli elementi d'Euclide et la critica antica e moderna* (libri I-IV). *Per*

la storia e la filosofia delle matematiche, 1 vol. in-8° de 323 pp. avec figures, Albert Stock, Rome. (Avec le concours de divers collaborateurs). (Notice dans *Bull. of the Am. Math. Soc.,* vol. XXXII, 1926, pp. 398.) Récemment a été publié le volume relatif aux livres V-IX (Zanichelli, Bologne). Cet ouvrage est en cours de publication.

Les conférences aux divers Congrès ont été mentionnées plus haut.

DÉTAIL DES ARTICLES PUBLIÉS PAR Mr ENRIQUES DANS DIVERS JOURNAUX SCIENTIFIQUES

Rendiconti delle sessioni dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna (1)

Sur les surfaces et les variétés à plusieurs dimensions, dont les géodésiques sont représentées par des équations linéaires, t. VII, pp. 52-8, 1902-3.

Commemorazione di L. Cremona, t. VIII, pp. 37-51, 1903-4.

Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières, t. IX, pp. 5-13, 1904-5.

Sur les principes de la mécanique, t. X, pp. 48-52, 1905-6.

Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, t. XI, pp. 11-5, 1906-7.

Une observation relative à la surface bi-genre 1, t. XII, pp. 40-5, 1907-8.

Les surfaces de genre 1, t. XIII, pp. 25-8, 1908-9.

Sur les transformations rationnelles des surfaces de genre 1, t. XIV, pp. 71-4, 1909-10.

Sur la définition de continu linéaire, t. XV, pp. 39-43, 1910-1.

Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali, t. XVI, pp. 70-3, 1911-2.

Sulla teoria geometrica degli immaginari, t. XVII, pp. 69-72, 1912-3.

Sulle intersezioni di due varietà algebriche, t. XIX, pp. 90-2, 1914-5.

L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica, t. XX, pp. 109-12, 1915-6.

Osservazioni sulle falde di una superficie algebrica nell'intorno di un punto singolare, t. XXI, pp. 102-7, 1916-7.

Sulle curve canoniche di genere p *dello spazio a* p — 1 *dimensioni,* t. XXIII, pp. 80-2, 1918-9.

Sul gruppo proiettivo delle curve ellittiche normali e su certi fasci sizigetici di queste curve, t. XXIV, pp. 91-95, 1919-20.

Sul teorema di esistenza per le funzioni algebriche, t. XXV, pp. 89-91, 1920-21.

Sulle equazioni algebriche $f(x, y) = 0$ *che si resolvono parametricamente mediante due polinomi,* t. XXVI, pp. 137-9, 1921-2.

(1) Tous les titres sont en italien dans les mémoires originaux.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti (1)

(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)

Serie IV

Alcune proprietà dei fasci di omografie negli spazii lineari ad n dimensioni, t. VI, 1890, II.

Serie V

Sur les groupes continus de transformations crémoniennes dans le plan, t. II, pp. 468-73, 1893, I.

Sur un groupe continu de transformations de Jonquières dans le plan, t. II, pp. 532-8, 1893, I.

Une question sur la linéarité des systèmes de courbes appartenant à une surface algébrique, t. II, pp. 3-7, 1893, II.

Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes hyperelliptiques, t. II, pp. 281-7, 1893, II.

Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes elliptiques, t. III, pp. 481-87; 536-43, 1894, I.

Sur les irrationnalités dont peut dépendre la résolution d'une équation algébrique $f(x, y, z) = 0$ *au moyen de fonctions rationnelles de deux paramètres*, t. IV, pp. 311-16, 1895, II.

Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont hyperelliptiques, t. V, pp. 191-7, 1896, I.

Les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 2$, t. VI, pp. 139-44, 1897, I.

Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 3$, t. VI, pp. 170-4, 1897, I.

Sur les plans doubles de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, t. VII, pp. 234-40, 1898, I.

Sur les surfaces possédant un faisceau elliptique, ou de genre 2, de courbes rationnelles, t. VII, pp. 281-6, 1898, II.

Sur les surfaces possédant un faisceau de courbes rationnelles, t. VII, pp. 344-7, 1898, II.

Sul gruppo di monodromia delle funzioni algebriche appartenenti ad una data superficie di Riemann, t. XIII, pp. 382-4, 1904, I.

Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di transformazioni birazionali, t. XV, pp. 665-9, 1906, II.

Intorno alle superficie iperellittiche. (En collaboration avec F. Severi), t. XVI, pp. 443-53, 1907, I.

Intorno alle superficie iperellittiche irregolari. (En collaboration avec F. Severi), t. XVII, pp. 4-9, 1908, I.

Sui moduli delle superficie algebriche, t. XVII, pp. 576-690, 1908, I.

Sopra una involuzione non razionale dello spazio, t. XXI, pp. 81-3, 1912, I.

(1) Tous les titres des mémoires originaux sont en italien.

Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellitiche, t. XXI, pp. 14-7, 1912, I.

Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie de genere lineare $p^{(1)} = 1$, t. XXIII, pp. 206-14; 391-7, 1914, I; 1919.

Sulla teoria delle singularità delle curve algebriche, t. XXV, pp. 607-13, 1916, I.

Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare, t. XXVI, pp. 415, 1917, II.

Sulla teoria delle omografie iperspaziali, t. XXVI, pp. 629-31.

Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi, t. XXVI, pp. 35-43, 1917, II.

Questioni numerative e loro significato nella geometria sopra le curve algebriche, t. XXVIII, pp. 370-4, 1919, I.

Sui fondamenti dell'aritmetica e sul principio dell'invarianza del numero, t. XXXII, pp. 113-7, 1923, II.

Comptes-rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)

Sur les surfaces algébriques admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles mêmes. (En collaboration avec Castelnuovo), n° 121, 1895.

Sur une classe de surfaces algébriques. (En collaboration avec Mr Castelnuovo), t. CXXXI, n° 19, 1900.

Remarque au sujet d'une note de M. S. Kantor, t. CXXXII, n° 5, 1901.

Sur les intégrales des surfaces algébriques, t. CXL, 16 janvier, 1905.

Conditions pour qu'une surface algébrique puisse être transformée birationnellement en un cylindre, t. CXL, 27 février.

Sur les surfaces algébriques irrégulières, n° 139, 1904; t. CXL, pp. 133-5, 1905.

Sur les surfaces algébriques de genre zero, t. CXL, pp. 564-6, 1905.

Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes, t. CLIV, pp. 418-21, 12 février, 1912.

Memoria della Società Italiana delle Scienze (detti dei XL)

Introduzione alla geometria sulle superficie algebriche. Sui piani doppi di genere uno, III, 10, 1896. (Deux articles.)

Bollettino della « Mathesis »

Il procedimento di riduzione all'assurdo, 1919.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

Ricerche sui fondamenti della geometria projettiva, II, 27, 1894.

Sopra le equazioni differenziali lineari del 4° ordine che diventano integrabili per quadrature quando se ne conosca un integrale particolare, 1896.

Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti

Le superficie con infinite transformazioni proiettive en sè stesse, t. I, sér. 7e, 4, 1892-3, t. V, sér. 7e, 1893-4.

Sur la seconde solution de Laplace des trois corps. (Extrait d'une lettre à Levi-Civita), t. LX (t. III, 8e ser., pp. 957, 1900-1.)

Periodico di Matematiche

Polemica logico-mattematica (polémique avec Burali-Forti). *La relatività del movimento nell'antica Grecia*, nos 4-5, 1921.

Le venerabili proprietà della materia, 1922.

La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria, 1923.

Il problema della forma della terra nell'antica Grecia, 1926.

Il significato umanistico della scienza nella cultura nazionale, ser. VI, vol. IV, 1924. *Il Cerchio*, 1926.

La definizione come problema scientifico, 1927.

L'immaginario in geometria, 1927, due articoli : 1. *Problemi elementari.* 2. *Le cassinoidi e le curve di Darboux.*

Revue de Métaphysique et de Morale

La Métaphysique de Hegel (1910).

Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique. (Atti del Congreso de filosofia matematica de Parigi, 1914), année 1917.

Rivista di Filosofia (Pavia)

Il concetto della logica dimostrativa secondo Aristotele, janvier, 1918.

La teoria democritea della scienza nei dialoghi di Platone, no 1, 1920.

Sur la genèse des concepts géométriques, 4, pp. 76, 1900.

Sur la psychologie physiologique appliquée aux différences entre les propriétés descriptives et les métriques, 4, p. 171, 1901.

(Les titres sont en italien dans les mémoires originaux).

Acta matemática

Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. (En collaboration avec F. Severi), t. XXXII et XXXIII, 1909-10.

Ce mémoire est consacré à l'étude des surfaces $F(x, y, z) = 0$ ou x, y, z peuvent s'exprimer en fonctions quadruplement périodiques de deux paramètres. Les auteurs introduisent plusieurs caractères de ces surfaces (diviseurs, rang, genre) et, utilisant de nombreux travaux de M. Emile Picard sur les fonctions abéliennes, font une étude approfondie des surfaces hyperelliptiques, les classant en familles et étudiant leur mode de représentation ; dans le second mémoire, ce sont les surfaces hyperelliptiques de rang 3,

4, 6, 8, 12 et 24 qui sont étudiées en s'appuyant sur les propriétés des transformations hermitiennes périodiques sur une surface de Jacobi, recherchant le genre de certaines de ces surfaces leur transformation en surfaces du quatrième ordre et terminant par des exemples.

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure (Paris)

Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimentions. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t, XXIII, 3e ser., 1906.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze fisiche e matematiche)

Alcune proprietà metriche dei complessi di rette e in particolare di quelli simmetrici rispetto ad assi, t. VII, pp. 1-55, 1895.

Atti dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino

Sulla massima dimensione dei sistemi lineari di curve di dato genere appartenenti ad una superficie algebrica, 1894, 29.

Sur les modules d'une classe de surfaces algébriques et sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables (titre en italien), t. XLVII, pp. 300-7, 1911-2.

Intorno ai fondamenti della geometria sopra la superficie algebraica, t. XXXVII, pp. 19-40, 1901-2.

Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino

Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, t. XLIV, 2e ser., pp. 171-232, 1894.

Memoria dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Sul teorema d'invarianza della serie canonica g_{2p-2}^{p-1} *appartenente ad una curva algebrica di genere* p, t. I, ser. VII, pp. 189-193, 1913-4.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo

Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva (trois lettres). (En collaboration avec Gino Fano), t. IX, pp. 79-85, 1895.

Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche, t. X, pp. 30-5, 1896.

Sulle ipotesi che permettono l'introduzione delle coordinate in una varietà a più dimensioni, t. XII, pp. 222-39, 1898, 1.

Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare, t. XIII, pp. 95-8, 1899.

Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t. XIV, pp. 290-302, 1900.

Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero, 1905.

Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse, t. XX, 1905.

Revue « Scientia »

Heterodox science and its social fonction, 1907.

Le principe d'inertie et les dynamiques non newtoniennes, 1907.

L'Università italiana, 1908. *La riforma dell'Università italiana,* 1908. *La riforma della Scuola media di Galetta e Salvemini* (1908).

Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica, 1908.

Razionalismo e Storicismo, 1909.

La teoria dello Stato e il sistema rappresentativo, 1909.

La filosofia positiva e la classificazione delle scienze, 1910.

Il pragmatismo, 1910.

I numeri e l'infinito, 1911. *Ilproblema della realtà,* 1911. *La philosophie de Jean Vailati,* 1911.

Matematiche e teoria della conoscenza, 1912.

Il significato della critica dei principii nello sviluppo delle matematiche, 1912. P. Sabatier, *L'orientation religieuse de la France actuelle,* 1912.

Reflexions sur l'art d'écrire un traité, a propos d'un traité de mathématique, 1915.

L'œuvre mathématique de Klein, 1921.

La connaissance historique et la connaissance scientifique dans les critiques de Enrico de Michelis, 1921.

Un paradosso meccanico.

Annali di matematica pura ed applicata

Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, t. I, 4e sér., 1924.

Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio. (En collaboration avec Gino Fano), t. XXVI, 2e sér., pp. 59-99, septembre à décembre, 1897.

Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t. VI, 3e sér., pp. 165-225, 1901.

Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazione algebriche fra quattra variabile, t. XX, 3e sér., pp. 109-11, 1913.

Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ une équation algébrique, irreductible, de degré 2 en x_1, x_2, et de degré n en x_3, x_4. Pour que cette équation puisse être résolue rationnellement (les x_i fonctions rationnelles de trois paramètres), il suffit que l'on puisse déterminer quatre fonctions rationnelles de deux variables

x_i (v_1. v_2) vérifiant l'équation et telles que x_3, x_4 ne soient pas liées par une relation indépendante de v_1, v_2.

Compte-rendu des œuvres mathématiques de Luigi Cremona (titre en italien dans l'original), t. XXII, 3e sér., pp. 327-30, 1914.

Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane (Battaglini)

Le omografie cicliche negli spazzi ad n dimensioni, 30, 1890.

Le omografie armoniche negli spazzi lineari ad n dimensioni, 30, 1890.

Sugli spazzi pluritangenti delle varietà cubiche appartenenti allo spazio a quattro dimensioni, 31, 1893.

Mathematische Annalen

Sui sistemi lineari di superficie algebriche ad intersezioni variabili iperellittiche, 46, 1895.

Sur quelques résultats récents dans la théorie des surfaces algébriques. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t. XLVIII, pp. 241-316, 1897.

Sulle irrazionalità da cui può farsi dependere la risoluzione d'una equazione algebriche $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri, t. XLIX, pp. 1-23, 1897. Reproduction d'un autre article des « Lincei ».

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues, t. LI, pp. 133-53, 1898-9.

Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau de courbes rationnelles (titre en italien dans l'original), t. LII, pp. 449-56, 1899.

Max Noether. (En collaboration avec G. Castelnuovo et F. Severi), t. XCIII, 1923,

Note. — Dans le volume II (1906) du livre *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes* écrit par E. Picard en collaboration avec Mr Georges Simart, figure une note de MM. Castelnuovo et Enriques où ces derniers ont compendié, très clairvment, les concepts et les propositions plus essentiels établis par leurs études.

TRANSCRIPTIONS DE JUGEMENTS DIVERS SUR DES ARTICLES DE MONSIEUR ENRIQUES, PUBLIÉS DANS QUELQUES JOURNAUX MATHÉMATIQUES. (S. RENDI, J. DRACH, S. LATTÈS, R. GARNIER, P. DROUIN, J. PÉRÈS, ETC.)

Mathematische Annalen

Sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques à intersections variables hyperelliptiques, t. XLXI, pp. 179-99, 1895.

Un certain nombre de travaux (MM. Noether, Bertini, Guccia, Iung, etc.), ont pour but la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques

de genres 0, 1, 2 et leur réduction à des types (d'ordre minimum) irréductibles au moyen des transformations birationnelles du plan. Les résultats obtenus peuvent se traduire en théorèmes projectifs relatifs aux surfaces rationnelles dont les sections planes sont des courbes de genre 0, 1, 2; ils se rattachent aux recherches de MM. Picard et Del Pezzo.

L'auteur s'est proposé d'étudier les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes hyperelliptiques, et comme la théorie des transformations birationnelles de l'espace est encore peu avancée, il a dû faire, tout d'abord, une étude projective des variétés à trois dimentions dont les sections (par un E_{n-2} dans l'espace E_n) sont des courbes hyperelliptiques. Les systèmes de surface (à intersection hyperelliptiques) pour lesquels la condition de passer par un point entraine celle de passer par un certain nombre de points liés au prémier, sont exclus de ces recherches, bornées au systèmes simples.

I. Surfaces à sections hyperelliptiques. Rappel de résultats connus sur les surfaces à sections rationnelles ou elliptiques. Toutes les surfaces algébriques dont les sections (par des plans ou des hyperplans) sont des courbes hyperelliptiques de genre p, nul ou positif, sont, où des surfaces reglées de genre p, ou des surfaces rationnelles qui pour $p > 1$, contient un faisceau linéaire de coniques. Théorème plus général de M. Castelnuovo.

II-III. Systèmes linéaires de surfaces à intersections variables rationnelles ou elliptiques. Tableau complèt de ces systèmes au nombre de douze.

IV. Systèmes linéaires de surfaces à intersections hyperelliptiques.

Toute variété à trois dimentions dont des sections sont des courbes hyperelliptique de genre p (> 1), ou bien contiennent un faisceau de plans de genre p et est irrationnelle, ou elle est rationnelle et contient un faisceau de quadriques.

Chaque système linéaire *simple* de surfaces dont les intersections variables sont hyperelliptiques (de genre $p > 1$) peut se transformer birationnellement en un système de surfaces d'ordre n avec une base rectiligne d'ordre $(n-2)$, une base curviligne coupant tous les plans passant par cette droite en deux points situés en dehors de la droite et (peut-être) d'autres éléments-bases.

Sur quelques résultats récents dans la Théorie des surfaces algébriques. (En collaboration avec G. Castelnuovo.) Écrite en français, t. XLVIII, pp. 241-316, 1897.

L'étude des intégrales simples et doubles de différentielles algébriques de fonctions de deux variables, a conduit quelques géomètres français, au premier rang desquels il faut citer M. Picard, à certaines propriétés des surfaces algébriques, invariantes par une transformation birationnelle quelconque. Les géomètres italiens sont parvenus aux mêmes résultats par l'étude des systèmes linéaires de courbes algébriques qui appartiennent à une surface algébrique. Les auteurs ont eu pour but de résumer ici leurs recherches an-

térieures et de les présenter dans l'ordre logique en les rapprochant des propriétés connues des courbes algébriques planes : les démonstrations, qui exigent l'examen d'un trop grand nombre de cas particuliers, ont été supprimées; on donne seulement les énoncés des théorèmes et les considérations qui servent le mieux à les mettre en lumière.

Indiquons rapidement les diverses questions traitées dans cette intéressante monographie, écrite en français, comme nous l'avons dit :

I. Transformations birationnelles. Genre d'une courbe et d'une surface d'après Clebsch et M. Noether.

Transformations birationnelles. Éléments exceptionnels. Repartitions en classes des variétés algébriques. Genre d'une courbe et d'une surface algébrique : *genre géométrique* p_g, défini par la considération des surfaces adjointes; *genre numerique* p_n.

II. Série linéaire de groupes sur une courbe. Système linéaire de courbes sur une surface.

Série linéaire sur une courbe : ordre, dimension. Série complète.

Système linéaire de courbes sur une surface : dimension, degré, genre. Systèmes linéaires complèts. Opérations élémentaires, sur les séries et les systèmes linéaires.

III. Courbes adjointes à une courbe plane. Surfaces sous-adjointes à une surface de l'espace ordinaire. Courbes adjointes. Série caractéristique d'un système linéaire de courbes planes. Surfaces sous-adjointes (*Restsatz* de M. Noether).

IV. Système adjoint à un système donné. Série canonique sur une courbe. Système adjoint à un système de courbes planes; ses propriétés caractéristiques. Système adjoint à un système linéaire donné sur une surface algébrique. Définition directe. Surfaces adjointes à une surface, à une courbe gauche.

V. Invariants d'une surface par rapport aux transformations birationnelles.

Système canonique, sa dimension est $p_g - 1$; sa construction. Système canonique réductible. Les caractères $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$: $p^{(1)}$; genre de la courbe canonique générale; $p^{(2)}$, degré du système canonique, est égal à $p^{(1)} - 1$ (exceptions).

Définition numérique de $p^{(1)}$, $p^{(2)}$. Genre numérique, deux nouvelles définitions de ce genre.

Surfaces regulières : $p_g = p_n$. Quelques classes de surfaces irregulières.

Quelques relations entre les caractères invariants.

VI. Systèmes linéaires spéciaux et non spéciaux. Extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch.

Séries spéciales et non spéciales sur une courbe.

Système réguliers et systèmes surabondants sur une surface. Systèmes spéciaux.

VII. Sur les surfaces rationnelles et sur quelques plans doubles.

Quelques propriétés des surfaces rationnelles : On connait le degré (ou le genre) d'un système linéaire de courbes tracées sur la surface. Systèmes adjoints succesifs. On connait les invariants numériques, en connait l'ordre de la surface.

Surfaces dont les coordonnées sont fonctions rationnelles de deux paramètres, surfaces admettant un groupe continu de transformations birationnelles en elles-mêmes. Plans doubles du genre un : 4 classes.

Sur les irrationnelles dont peut dépendre le résolution d'une équation algébrique $f(x, y, z) = 0$ *a l'aide de fonctions rationnelles de deux paramètres* (titre en italien dans l'original), t. XLIX, pp. 1-23, 1895.

Toutes les équations $f(x, y, z)$ d'une même *classe de Riemann*, c'est-à-dire transformables birationnellement entre elles, se partagent en *sous-classes* lorsque l'on place dans une même sous-classe deux équations qui dérivent l'une de l'autre par une transformation birationnelle à *coefficients rationnels*.

À l'égard de la classe la plus simple, *pour laquelle* x, y, z *peuvent être pris rationnels en* u *et* v, *ces deux paramètres étant eux-mêmes rationnels en* x *et* y *et* z, M. Enriques s'est proposé, par la voie géométrique, la recherche des irrationnelles dont peuvent dépendre ces fonctions rationnelles $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Il arrive aux conclusions suivantes :

Pour une surface algébrique $f(x, y, z) = 0$, dont les trois genres sont nuls (genre géométrique, genre numérique, bigenre), ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité par des fonctions rationnelles *réversibles* de deux paramètres, la détermination de ces fonctions rationnelles x, y, z peut dépendre, en dehors des opérations rationnelles, de l'*extraction de racines carrées et cubiques*, et de la résolution d'une des *équation pour la bisection des arguments :*

a) Des fonctions abéliennes de genre 3 ;

b) Ou des fonctions abéliennes de genre 4 ;

c) Ou des fonctions hyperelliptiques de genre p ($p = 1, 2, 3, \ldots$).

La méthode suivie conduit à distinguer ces équations $f(x, y, z) = 0$ en quatre familles : la première, qui comprend deux types de sous-classes analogues à celles des équations du genre zéro à deux variables, se résout, sûrement, à l'aide d'une extraction de racine carrée ; la seconde, qui donne lieu à plusieurs types de sous-classes, exige, pour sa résolution, la bisection de l'argument pour les fonctions abéliennes de genre 3, ou une racine carrée et une racine cubique ; la troisième et la quatrième donnent lieu à deux types de sous-classes et leur résolution exige les opérations (b) et (c), énoncées plus haut.

Les équations de la seconde famille peuvent, en outre, se résoudre par des fonctions rationnelles non réversibles, à l'aide de racines carrées et cubiques.

La dernière partie est consacrée à l'application de ces résultats à l'équation à quatre variables

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 : \qquad (1)$$

a) Si l'équation $f(x_1, x_2, x_3, a) = 0$, obtenue en faisant $x_4 = a = \text{const.}$, est résoluble à l'aide de fonctions rationnelles, l'équation (1) peut toujours se résoudre en prenant pour x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions rationnelles de trois paramètres, qu'on peut construire par des extractions de racines carrées et cubiques;

b) Si toutes des équations

$$f(x_1, x_1, x_3, ax_3 + b) = 0$$

sont résolubles à l'aide de fonctions rationnelles de deux paramètres, on peut prendre pour x_1, x_2, x_3, x_4 des fonctions rationnelles de u, v, w et d'un radical carré qui porte sur un polynôme (particulier) en u, v, w;

c) Si toutes les équations

$$f(x_1, x_2, x_3, ax_2 + bx_3 + c) = 0$$

sont résolubles par des fonctions rationnelles de deux paramètres, on peut prendre pour tous les x_i des fonctions rationnelles de trois paramètres (non réversibles).

Dans chacun de ce cas, on obtient des simplifications quand l'équation modifiée à trois variables appartient à l'une des familles caracterisées plus haut. *On n'exclut pas d'ailleurs la possibilité de résolutions plus simples.*

Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques refermant plusieurs inconnues, t. LI, pp. 133-53, 1898-9.

Cet article reproduit les matières traitées par l'auteur dans sa conférence au Congrès International des mathématiciens à Zurich (août 1897).

Il s'agit de rechercher les solutions *algébriques* des équations ou *systèmes d'équations* à plusieurs inconnues, *indéterminés,* c'est-à-dire, refermant plus d'inconnues que d'équations, que l'on doit considérer comme des plus simples.

M. Enriques indique les différentes questions qui se présentent et les réponses que l'on a pu faire à quelques-unes :

Si l'on peut résoudre la relation $f(x, y) = 0$ en prenant pour x, y des fonctions rationnelles d'un paramètre t, on peut choisir ce paramètre de façon qu'il soit rationnel en x, y et donne lieu a une représentation *propre* (à une valeur de x, y correspond une seule valeur de paramètre) (Lüroth). Ce théorème a été démontré pour trois variables par M. Castelnuovo. Il reste en suspens pour un plus grand nombre de variables.

Si l'on peut résoudre $f(x, y) = 0$ avec une irrationnelle d'ordre n (n étant l'ordre le plus petit possible), la représentation est *propre* et le paramètre peut être choisi rationnel en x, y (Enriques).

Pour trois variables, l'équation $f(x, y, z) = 0$ du quatrième degré se résout par une seule racine carrée portant sur une fonction rationnelle de deux paramètres, qui ne seront jamais rationnels en x, y, z lorsque f est général de son degré.

Après quelques mots sur les transformations simplement ou doublement rationnelles des variétés algébriques, M. Enriques revient à l'étude générale de la résolution de $f(x, y) = 0$ au moyen d'une irrationnelle $t(x, y)$, rationnelle en x et y : influence du choix de $t(x, y)$ sur l'irrationnelle $x(t)$, influence de $f(x, y)$?

Former toutes les équations qu'on peut résoudre avec des irrationnelles de nature donnée : sans irrationnelles on sait que $f(x, y) = 0$ est de genre zéro; avec une racine carrée on a les équations hyperelliptiques $y^2 = f(x)$. Si l'on donne le *groupe* de l'irrationnelle $x(t)$, peut-on trouver l'équation qui définit $x(t)$, même en assignant à l'avance le genre de l'équation?

Comment utiliser les résultats sur la résolution de $F(x_1, x_2) = 0$ pour l'équation à n variables $F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0$?

Résultats simples obtenus par M. Noether, dans le cas où $F(x_1, x_2)$ est de genre zéro pour trois variables.

Étude des équations à trois inconnues $f(x, y, z) = 0$: les cas $n = 1, 2, 3$ se résolvent par des fonctions rationnelles ; $n = 4$ par une racine carrée (pas d'autre résolution plus simple) ; cas remarquables d'après les valeurs des genres $p^{(n)}, p^{(9)}, p^{(1)}, p^{(2)} \ldots$

Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau de courbes rationnelles, t. LII, pp. 449-56, 1899.

Un faisceau de courbes algébriques sur la surface algébrique $f(x, y, z) = 0$ se définit à l'aide de deux fonctions rationnelles :

$$X = X(x, y, z), \qquad Y = Y(x, y, z),$$

liées par une relation identique $\varphi(X, Y) = 0$ dont le *genre* p est dit *genre du faisceau*. Si $p = 0$, le faisceau est rationnel ou linéaire en x, y, z, s'expriment rationnellement à l'aide d'un paramètre; chaque courbe du faisceau C (correspondant à un système de valeurs de X, Y) peut donc être rapportée, point par point, à une droite génératrice du cylindre $\varphi(X, Y) = 0$. Il semble, à première vue, que la surface $f = 0$ peut être transformée birationnellement en ce cylindre. Cette conclusion n'est pas légitime parce que la représentation de C sur la droite fait intervenir des *irrationnelles arithmétiques* qui peuvent varier avec C; en dépendant algébriquement de X et de Y.

Si l'on a une seule courbe C rationnelle, M. Noether (*M. A.*, t. III) a démontré qu'on peut la transformer rationnellement en une conique sans faire intervenir d'irrationnelles arithmétriques : il y aura donc, au plus, pour passer à la droite, qu'une irrationnelle quadratique. Une surface pos-

sédant un faisceau de courbes rationnelles se transformera, birationnellement, en une surface possédant un faisceau de coniques Γ.

Peut-on, maintenant, s'arranger pour que les irrationnelles arithmétiques qui interviennent dans la représentation de C sur une droite ne varient pas avec x, y?

M. Noether a démontré qu'il suffit, pour cela, de trouver une courbe qui coupe en un seul point chaque courbe de C; et il a déterminé une telle courbe dans le cas $p = 0$ (faisceau linéaire), et établi, ainsi, que la surface $f(x, y, z) = 0$ est rationnelle. M. Enriques démontre ici, pour $p > 0$, l'existence de la courbe qui coupe en un seul point chaque courbe C; il en résulte donc que : *Toute surface algébrique* $f'(x, y, z) = 0$ *qui contient un faisceau de courbes rationnelles (unicursales), peut être transformée birationnellement en une surface réglée* (le cylindre $\varphi(X, Y) = 0$, par exemple), *ayant le genre du faisceau.*

Atti de la R. Accademia delle Scienze di Torino

Sur les fondements de la géométrie sur des surfaces algébriques, t. XXXVII, pp. 19-40, 1901-2.

Les principes généraux de cette géométrie ont été posés par l'auteur dans deux mémoires : *Ricerche di geometria sulle superficie algebriche (Mémoire de Turin,* 2e sér., t. XLIV, 1893) et *Introduzione alla geometria sulle superficie algebriche (Mém. des XL,* 3e sér., t. X). Un travail ayant relation avec ce sujet est, aussi le mémoire de Castelnuovo et Enriques : *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche (Annali di Matematica,* 3e sér., t. XI).

Ici l'auteur reprend l'étude de ces principes en y introduisant des modifications, principalement en vue d'un but didactique. La difficulté principale dans ces recherches étant le fait qu'un point peut se transformer en une courbe, l'auteur réussit à la vaincre, en étudiant, d'abord, les propriétés des systèmes linéaires qui sont invariantes pour toute transformation ne produisant pas de courbes exceptionelles, et puis, de ces propriétés invariantes relatives, il peut passer à d'autres qui possèdent une importance sans restriction.

Sur les modules d'une classe de surfaces algébriques et sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables, t. XLVII, pp. 300-7, 1911-2.

L'auteur rappelle, d'abord, les deux manières de déterminer les $3p - 3$ modules d'une classe de courbes de genre $p \geqq 1$, la première au moyen du théorème d'éxistence pour les fonctions algébriques d'une variable, la seconde en déterminant la dimension de la série continue des courbes d'ordre donné ayant un nombre donné de points doubles.

Pour les surfaces, en n'ayant pas un théorème d'existence pour les fonc-

tions de deux variables, l'auteur a trouvé le nombre des modules par une extension de la première méthode. En calculant les mêmes modules dans l'hypothèse qu'on ait un théorème d'existence, c'est-à-dire, d'un théorème assignant les conditions pour qu'une courbe soit de diramation d'un plan n-uple, et, en comparant les résultats, il en tire des conséquences relatives au supposé théorème d'existence, qu'il annonce comme sujet d'un autre travail.

Memorie di Torino

Recherches de Géométrie sur les surfaces algébriques, t. XLIV, pp. 171-232, 1894.

Étude de *Géométrie sur une surface*. L'auteur étudie les *systèmes linéaires* ∞^k de courbes appartenant à une surface, c'est-à-dire, les systèmes tels que k points de la surface déterminent une (seule) courbe du système, les courbes (éléments) du système pouvant se faire correspondre projectivement au points d'un espace linéaire S_k, En supposant $k > 1$, par un point de la surface il passe toujours plus d'une courbe du système : par conséquent, on peut parler du nombre de points communs à deux courbes variables. Ce nombre D est le *degré* du système : le *genre* π des courbes, est le *genre* du système. S'il arrive que les courbes passant par un point M de la surface passent, en conséquence, par un certain nombre, soit $m - 1$, d'autres points, variables avec M, on a, sur la surface, une *involution* I_m. Un système qui ne donne pas lieu à une telle involution, c'est-à-dire, dans lequel le passage d'une courbe par un point n'entraine pas le passage par d'autres points, est un système *simple*. Après quelques propriétés sur les systèmes réductibles, l'auteur définit les systèmes *normaux* et les systèmes *complets*. Un système est *contenu totalement* dans un autre lorsque toute courbe du premier, l'est aussi du second ; il est *partiellement* l'orsque une courbe du premier, avec une autre courbe, constitue une courbe du second. L'auteur dit qu'un système linéaire est *normal* lorsqu'il ne peut être contenu dans un autre de même degré (et ici, la manière *partielle* reste exclue, ainsi que l'auteur le démontre), *complet* lorsqu'il ne peut être contenu, pas même *partiellement*, dans un autre de même genre.

Cela posé, l'auteur démontre qu'un système linéaire de degré donné appartient à un système normal déterminé, de même degré. Il trouve ainsi qu'une courbe appartient à un système complet de même genre, et il déduit de là, une partie du *Restsatz*. Sur une courbe générale du système, les courbes de même système déterminent une série qui est appelée *série caractéristique*. L'auteur (§ II) considère les courbes qui donnent sur la courbe générale du système ∞^r (à courbes fondamentales distinctes) un groupe résiduel de la série caractéristique, et, sur la courbe générale du système ∞^{r-1} renfermé dans le premier, donnent un groupe contenu dans le résidu de la série caractéristique. De telles courbes, sur une surface d'ordre n en S_3, sont données par des surfaces adjointes d'ordre $n - 4$. Ces courbes *(canoniques)* for-

ment un système linéaire, et sont liées invariantivement à la surface. Elles conduisent à deux caractères invariants de la surface : le genre p, qui est la dimension du système canonique, augmenté de l'unité, et le *Curvengeschlecht* de Noether $p^{(1)}$, qui est le genre du système canonique. Les systèmes appartenant à une surface se distinguent en *purs* et *impurs*. Dans les premiers, les courbes canoniques déterminent sur la courbe générale un groupe résiduel de la série caractéristique ; dans les seconds, ils déterminent un groupe contenu dans un groupe résiduel. Les premiers, sur une surface convenablement transformée, n'ont pas de points de base, tandis que les seconds en ont. Cette distinction se rattache à la consideration des *courbes exceptionnelles* (Noether). Comme applications, on obtient que :

Sur une surface de genre > 0, une courbe appartient à un système complet déterminé. Le résidu d'une courbe par rapport à un système normal, est toujours un système normal (s'il a un degré). Un système pur est nécessairement complet ($p > 0$).

Dans le paragraphe III, l'auteur définit le système *adjoint* d'un système linéaire (C) de dimension $r \geqq 2$, les courbes de ce système donnent, sur la courbe générale de (C), un groupe canonique, et sur celle d'un système ∞^{r-1}, contenu dans (C), elles en donnent un, qui est contenu dans un groupe appartenant à la série, somme de la série canonique et d'une autre série qui est la différence entre celle qui est donnée par (C), et la série caractéristique du système ∞^{r-1}. En indiquant par δ (C) le *défaut* de la série déterminée par le système adjoint sur la courbe générale de (C), c'est-à-dire, la différence entre la dimension virtuelle du système adjoint et sa dimension effective, la dimension de ce dernier système est $p + \pi - 1 - \delta$ (C). Si (C) est un système pur *simple*, la quantité δ (C_1) relative à un système pur arbitraire, C_1, est $\leqq \delta$ (rC), (rC) étant le système r-uple de (C) pour r suffisamment grand. Or, si la surface a des singularités ordinaires, δ (rC) pour r croissant à l'infini a un *maximum* K, qui est un caractère invariant de la surface. Le cas $K = 0$, qui à lieu lorsque δ (rC) $= 0$ (et réciproquement), indépendamment de toute restriction relative aux singularités, est particulièrement important. En employant le système adjoint, l'auteur démontre que tout système impur (à points de base distincts) peut, en ajoutant ses points de base, se déduire d'un système qui coïncide avec le résidu du canonique par rapport à l'adjoint qui est pur, ou bien n'a que des points de base simples. Ce même Chapitre contient aussi la démonstration de la seconde Partie du *Restsatz* et des applications aux surfaces des genres 0, 1. Signalons la proposition :

Deux surfaces générales d'ordre $n \geqq 4$ (dans S_3) ne peuvent se rapporter biunivoquement l'une à l'autre que lorsque elles sont projectives.

Le chapitre IV est dédié au systèmes purs. Leur série caractéristique est composée lorsque l'est celle du système canonique ; et, pour ces systèmes, l'auteur donne une extension du théorème de Riemann-Roch. Indiquons par

$i - 1$ la dimension du système résiduel de (C) par rapport au canonique, par ω la *surabondance* du système (C), c'est-à-dire, qu'en supposant la surface en S_3 et en coupant (C) par des adjointes, la dimension virtuelle ρ est telle que l'on ait

$$r - \rho = \omega - i$$

r étant la dimension effective de (C). Alors, π étant la genre de (C) et n le degré, on a

$$\pi - 1 - n + r = p + \omega - i.$$

Dans le chapitre V sont traitées les courbes fondamentales. Entre les caractères de (C),

$$\pi, r, n = r - \rho,$$

le genre π d'une courbe fondamentale, et les caractères

$$\pi', r', n', \rho'$$

du système résiduel (C′) de K, il y a des relations desquelles on déduit

$$\rho - \rho' = \pi,$$

c'est-à-dire,

$$\omega - i - (\omega' - i') = \pi.$$

Un système est *régulier* lorsque $\omega = 0$. Les systèmes réguliers ont des propriétés remarquables. Par exemple, un tel système de dimension $> p$ n'a pas de courbes fondamentales de genre > 0. Lorsqu'il est de dimension p, il ne peut avoir d'autres courbes fondamentales de genre > 0 qu'une (seule) courbe de genre 1 (ayant pour résidu le système canonique). Relativement aux systèmes multiples d'un système donné, l'auteur trouve que, pour m suffisamment grand, le multiple $(m\mathrm{C})$ d'un système pur (C), irréductible et n'ayant que des courbes fondamentales irréductibles de genre 0, est régulier. Il déduit de là la résolution d'un problème de postulation relatif aux variétés passant par une surface dans un hyperespace, et trouve que, par une surface F d'ordre n en S_r, n'ayant pas de courbes exceptionnelles et ne possédant que des points multiples à cône osculateur de genre 0, passent L variétés V_m d'ordre m, linéairement indépendantes, étant

$$L \leq \binom{m+r}{r} - 1 - p - \frac{m(m+1)}{2} n + m(\pi - 1),$$

pour m suffisamment grand. Enfin la considération des courbes fondamentales de genre 0 conduit a l'auteur au théorème :

Une surface en S_3 peut acquérir, par une transformation, autant de points doubles isolés qu'il y a des points doubles isolés de la surface canonique correspondante. Le nombre de ces points doubles est un autre caractère invariant pour les surfaces de genre $p > 3$.

Le chapitre VI et dernier est relatif aux involutions. L'auteur y donne

une extension d'un théorème de M. Castelnuovo, relatif aux séries irrationnelles en démontrant que : Si les surfaces F, F′ sont en correspondance $[1, m]$, aux courbes canoniques de la première (supposée de genre > 0) correspondent des courbes spéciales de la seconde, qui composent des courbes noniques avec la courbe de coïncidence de l'involution I_m, dont les groupes correspondent sur F aux points de F′.

Enfin, il forme une expression invariante relative aux involutions rationnelles, où entrent les caractères d'un réseau dont deux courbes se coupent en un groupe de l'involution.

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris

Sur les intégrales simples de première espèce d'une variété ou d'une surface algébrique à plusieurs dimensions. (En collaboration avec Castelnuovo), t. XXIII, 3e sér., pp. 339-66, 1906.

Dans ce *Mémoire,* est poursuivie avec succès l'analogie que des travaux récents ont établie entre le *genre* d'une courbe algébrique plane et l'*irrégularité* d'une surface algébrique, c'est-à-dire, le nombre des intégrales distinctes de différentielles totales de première espèce que possède cette surface. Cette analogie subsiste, en effet, d'une façon innatendue dans les questions qui se rapportent à la connexion líneaire.

Après un lemme aux termes duquel *une courbe algébrique ne peut jamais posséder une série continue de systèmes linéaires d'intégrales abéliennes réductibles,* vient le théorème fondamental que voici :

L'irrégularité d'une surface à trois ou plusieurs dimensions, est égale au nombre des intégrales simples de première espèce attachées à une surface section de la variété.

On peut, pour l'étude des intégrales, de leurs périodes, remplacer toujours la variété par la surface section, ce qui n'est plus permis quand il s'agit des intégrales d'une surface algébrique à deux dimensions et des intégrales abéliennes attachées à ses sections planes.

L'*irrégularité* d'une surface à deux dimensions, est un nombre invariant relativement aux transformations birationnelles ; on est parvenu à démontrer que ce nombre est égal à la différence $p_g - p_a$ entre les genres géométrique et arithmétique de la surface. Ce résultats est étendu aux variétés algébriques à trois dimensions : *leur irrégularité est égale à la différence* P_g [1] $P_{(a)}$ [1] *entre les deux genres superficiels, géométrique et arithmétique de la variété, pourvu qu'il y est au moins* ∞^3 *surfaces canoniques* ($P_g > 2$) *se coupant deux à deux suivant des courbes variables irréductibles.* Une propriété analogue subsiste pour les variétés à plus de trois dimension.

Ces caractères de connexion du continuum (de Riemann) à $2d$ dimensions, relatifs à une variété à d dimensions fournissent des invariants de la variété (Picard). Mais des cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le continuum, ne donnent pas un nouvel invariant des variétés à d dimensions, car

les auteurs démontrent que *l'irrégularité d'une variété est égale, quel que soit d, à la moitié du nombre de cycles linéaires distincts qu'on peut tracer dans le continuum relatif à cette variété.*

On sait que les surfaces irrégulières d'irrégularité q sont caractérisées (Enriques) par cette propriété, qu'elles contiennent des systèmes ∞^q de courbes parmi lesquels il n'y a pas ∞^2 appartenant à une série linéaire. La même propriété subsiste aussi pour les variétés algébriques à $d > 2$ dimensions.

À la fin de leur *Mémoire,* les auteurs reviennent sur le théorème fondamental énoncé plus haut pour en déduire diverses conséquences. Ainsi, *dans notre espace, il n'existe aucun système linéaire de dimensions supérieure à* 1 *dont la surface générale soit irrégulière,* sauf dans le cas ou la courbe intersection variable de deux surfaces est réductible.

La dernière conséquence, plus remarquable, fournit la solution d'une question dont l'analogue, relative aux courbes algébriques, est encore en suspens. On sait qu'on peut écrire les tableau des $2p^2$ périodes de p intégrales abéliennes normales attachées à une courbe de genre p, dès que l'on connait $\frac{p(p+1)}{2}$ de ces périodes. Mais on ne peut choisir arbitrairement ces dernières quand p surpasse 3, car $3p - 3$ seulement d'entre elles sont indépendantes. Au contraire, les auteurs démontrent qu'*on peut toujours construire une surface algébrique ayant* p *intégrales simples, distinctes, de première espèce, dont* $\frac{p(p-1)}{2}$ *périodes sont données arbitrairement,* de façon pourtant a satisfaire aux inégalités qui assurent la convergence des séries θ correspondantes.

Scientia

La connaissance historique et la connaissance scientifique dans la critique de Enrico De Michelis.

Il y a deux manières d'entendre la philosophie de l'histoire : comme théorie constructive qui veut diriger la recherche historique par rapport à une représentation synthètique de fins et de causes, et comme critique qui tend à expliquer les conditions et la signification par rapport à d'autres formes de savoir. L'histoire se construit précisement en fonction de la science, c'est-à-dire, que la connaissance des rapports phénoméniques ou des conditions causales que l'on désigne *comme loi de la nature* sert de présupposition à l'interprétation des données empiriques laquelle tend à composer les événements dans le tableau de la réalité historique.

De là, la comprehension de cette dernière, loin d'apparaître comme indépendante et opposée à la comprehension de la réalité scientifique dans le sens strict du mot, doit être regardée comme vision complémentaire et intégrante de la réalité, même toute entière, qui se reflète dans les diverses formes de notre savoir.

Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa

Alcune proprietà metriche dei complessi di rette e in particolare di quelle simmetriche rispetto ad assi, t. VII, pp. 1-85, 1895.

Les coordonnées de rayons employées par l'auteur sont les cosinus a, b, c et les quantités

$$l = \begin{vmatrix} y' & z' \\ b & c \end{vmatrix}; \qquad m = \begin{vmatrix} z' & x' \\ c & a \end{vmatrix}; \qquad n = \begin{vmatrix} x' & y' \\ a & b \end{vmatrix},$$

x', y', z' étant un point de la droite.

Les droites polaires des droites d'un plan, par rapport à un complexe de degré p, forment un système rationnel ∞^2 d'ordre $p\,(p-1)+1$ et de classe $p\,(p-1)$. Ce système a une surface focale d'ordre $2\,[p\,(p-3)+5]$ et de classe $2\,[p\,(p-3)+4]$, Des propriétés de ce système on déduit celles des systèmes de diamètres d'un complexe de degré p, et en particulier, des *axes centraux;* il y à, au plus, p^2 de ces axes.

Étant

$$\varphi = 0$$

un complexe de degré p, les complexes

$$\varphi - k\,(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{p}{2}} = 0,$$

lorsque p est pair, ou

$$\varphi - k^2\,(a^2 + b^2 + c^2)^p = 0,$$

lorsque p est impar, représentent des faisceaux contenant le complexe φ et le complexe cyclique

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Ce sont les complexes *homocycliques-homofocaux* de φ. Ils ont la propriété que leurs droites ont moment statique constant avec leurs polaires par rapport à φ. Tous ces complexes homofocaux ont même système diamétral, même surface centrale et même axes.

Une droite est un *axe de symétrie* du complexe $\varphi = 0$ lorsque le complexe est transformé en lui même par une symétrie orthogonale par rapport à la droite. On a deux espèces d'axes de symétrie : pour ceux de l'une, la congruence des droites perpendiculaires à l'axe n'appartient pas au complexe (ou elle lui appartient un nombre pair de fois) ; pour ceux de l'autre, la même congruence, lui appartient un nombre impar de fois.

Si un complexe à un nombre fini d'axes de symétrie, ces axes doivent passer par un point, et l'on a les cas suivants :

a) Ou il y a des axes dans un plan et disposés symétriquement autour d'un point et un axe perpendiculaire au plan et passant par ce point;

b) Ou il y a les neuf axes du cube ;

c) Ou il y a les quinze axes de l'icosaèdre.

En général, s'il y a des complexes de degré p ayant une certaine symétrie par rapport à des axes en nombre fini, il y en a aussi de tout degré supérieur $\equiv p \pmod 2$.

Un complexe de degré p peut avoir un nombre quelconque $N \leqq p$ d'axes de première ou seconde espèce appartenant à un faisceau. La droite perpendiculaire au faisceau est ou n'est pas axe de symétrie, suivant que le nombre N est pair ou impair. Le complexe peut avoir alors un nombre pair quelconque $\leqq 2p$ d'axes (p de première et p de seconde espèce) et la droite perpendiculaire au faiscean est alors un axe de symétrie.

Le dernier chapitre traite le cas du nombre infinis d'axes de symétrie. En laissant de côté le cas où toutes des droites de l'espace sont des axes ce qui conduit au complexe cyclique, on a le cas suivants :

a) Tous les axes d'un faisceau et la droite perpendiculaire au faisceau ;

b) Les axes d'un nombre fini de faisceaux parallèles qui appartiennent à un plan et sont en nombre impair, disposés symétriquement par rapport à un point, ou bien appartiennent à un nombre pair de plans du faisceau, disposés symétriquement par rapport à la droite commune, qui est un axe du complexe ;

c) Les axes d'une étoile ayant le centre à distance finie ;

d) Les axes d'une ou de plusieurs étoiles ayant les centres à l'infini, dont les directions sont celles des axes de symétrie d'un polièdre régulier ;

e) Les axes d'une congrence de droites orthogonales à une directrice, et cette directrice elle même ;

f) Les axes parallèles à un plan et ceux perpendiculaires à ce même plan.

Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Alcune osservazioni intorno alle superficie razionali reali.

Soit une surface

$$f(x, y, z) = 0$$

représentable sur le plan par les relations

$$x = \varphi(u, v) ; \qquad y = \psi(u, v) ; \qquad z = \chi(u, v).$$

L'ordre de connexion de la surface est le nombre 1 augmentée de celui des points de base du système

$$x\varphi + y\psi + z\chi = 0$$

et diminuée du nombre de courbes exceptionnelles fondamentales du même système.

Toutes les surfaces algébriques réelles d'ordre impair ont au moins une nappe d'ordre impair unilatérale. Une surface rationnelle réelle d'ordre pair est unilatérale si la somme des ordres des courbes exceptionnelles fondamentales de (1) est paire.

Sulla teoria geometrica degli immaginari.

La correspondance entre les points réels et imaginaires d'un plan et les points réels de S_4 conduit à la représentation de Standt.

Sulle intersezioni di due varietà algebriche.

Une surface d'ordre m et une courbe d'ordre n ont mn points communs. La démonstration de Poncelet *(Analyse des transversales,* n° 241 ; *Journal de Crelle,* t. VIII et *Traité,* 1866, t. II, p. 224) peut être généralisée et appliquée à deux variétés V_r^m, V_{n-r}^p de S_n.

L'intorno di una curva sopra una superficie algebrica.

Le domaine d'une courbe algébrique sur une surface algébrique, peut être regardé comme une surface rationnelle avec un ordre d'approximation aussi grand que l'on veut. Applications à la théorie des singularités des surfaces.

Osservazioni sulle falde di una superficie algebrica nell'intorno di un punto singolare.

La surface, dans le domaine d'un point r-uple, est constituée par *une seule nappe* lorsque les r valeurs de la fonction algébrique $z\,(x, y)$ forment (par continuation) une fonction analytique irréductible dans ce domaine. Si $z\,(x, y)$ est réductible, la surface se décompose en plusieurs nappes. Cas du point biplanaire. Le domaine d'un point i-uple peut être approché autant que l'on veut par une surface rationnelle à point i-uple.

Sur les surfaces et les variétés à plusieurs dimensions, dont les geodésiques sont représentables par des équations linéaire, t. VI, pp. 52-8, 1902-3.

L'auteur démontre, par voie synthétique, le théorème de Beltrami : *les surfaces représentables sur le plan, de manière qu'aux géodésiques correspondent des droites, sont à courbure constante.* Puis il l'étend, toujours par des considérations synthétiques, aux variétés à plusieurs dimensions.

Sur la propriété caractéristique des surfaces algébriques irrégulières, t. IX, pp. 5-13, 1904-5.

Si sur une surface algébrique, on construit, pour toute valeur de n, les courbes d'ordre n appartenant à la surface, ces courbes :

1° Se distribuent en un nombre fini de systèmes linéaires complets lorsque la surface est regulière ($p_a = p_g$) ;

2° *Se distribuent en un nombre fini de systèmes algébriques continus, généralement non linéaires et donnent ainsi lieu à un nombre infini de systèmes linéaires complets, lorsque la surface est irrégulière.*

Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, t. XI, pp. 11-15. 1906-7.

Toute surface de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, de genre arithmétique $p_a \geqq 0$ et de genre géométrique $p_g > p_a$, contient un faisceau de genre $p_g - p_a$ constitué par des courbes elliptiques.

Si une surface de genre géométrique $p_g = 1$ a le quadri-genre $P_4 = 1$, tous les pluri-genres sont $= 1$ et la courbe canonique a l'ordre 0; le genre arithmétique est $p_a = 1$ ou $p_a = -1$.

Une observation relative a une surface de bi-genre 1, t. XII, pp. 40-5, 1907-8.

Toute surface de genres

$$p_a = p_g = P_3 = 0, \qquad P_2 = 1$$

peut être regardée comme une surface double de genre 1.

Les surfaces de genre 1, t. XIII, pp. 25-8, 1908-9.

Il résulte de deux travaux de l'auteur (*Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, Mém. de Turin,* 1893; *Sui piani doppi di genere uno, Mém. des XL,* 1896) que toute surface algébrique des genres $p_a = P_2 = 1$ peut se transformer en une surface F_π d'ordre $2\pi - 2$, normale dans un espace S_π et dont les sections hyperplanes sont des courbes (canoniques) de genre π.

Le nombre π n'est pas déterminé *a priori*, et il y a des classes de surfaces correspondant à $\pi = 2, 3, 4$. La question générale de savoir s'il y a des F_π pour toute valeur de π est résolue ici. Pour toute valeur de π, on peut construire une famille de surfaces F_π d'ordre $2\pi - 2$ a sections (canoniques), de genre π en S_π, famille qui dépend de 19 modules au moins : les F_π correspondant à des valeurs diverses de π et à modules généraux, sont birationnellement irréductibles.

Sur les transformations rationnelles des surfaces de genre 1, t. XIV, pp. 71-4, 1909-10.

Si, entre deux surfaces régulières F, F′ ayant les genres 1 ($p_a = P_2 = 1$), il y a une correspondance rationnelle $(n, 1)$ non univoquement inversible, les groupes de n points correspondant aux points de F′ sur F, forment une involution I_n engendrée par un groupe de n transformations cycliques.

Sur la définition du continu linéaire, t. XV, pp. 39-43, 1910-1.

On peut construire une série continue qui ne peut se mettre en correspondance ordonnée avec le continu numérique.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo

Una proprietà della serie continua di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare, t. XIII, pp. 95-8, 1899, I.

L'auteur établit le théorème suivant : *Sur une surface regulière* ($p_n = p_g$) *toute série continue de courbes* C *est contenue totalement dans un système linéaire.* La démonstration repose sur la considération de deux systèmes linéaires complets (K) et (K_1) contenant totalement deux séries rationnelles formées chacune de m courbes C. L'étude du système subadjoint à (K) et l'application du principe « de la conservation des entiers » montrent que les courbes C sont contenues totalement dans les système [K — (m — 1) C]. La démonstration peut se simplifier à l'aide d'un théorème de M. Castelnuovo sur la série caractéristique d'un système linéaire complet.

Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche, t. X, pp. 30-5, 1896.

Soit une courbe C, $f(x, y) = 0$ admettant une représentation paramétrique algébrique de degré n; x et y s'expriment, donc, rationnellement en fonction d'une variable t et de X liée à t par l'équation $\varphi(X, t) = 0$ de degré n en X. Une telle représentation définit, lorsque t varie, une série rationnelle de groupes de n points sur la courbe C et l'on peut supposer que les groupes de cette série correspondent biunivoquement aux valeurs du paramètre t. Si, dès lors, cette série est une involution linéaire, la représentation paramétrique de la courbe C sera simple. Sinon :

« Ou bien x et y sont des fonctions irrationnelles de degré n d'un paramètre τ qui est a son tour fonction rationnelle de t.

« Ou bien la courbe est transformable en une courbe d'ordre n, admettant, donc, une infinité de représentations paramétriques de degré n ».

Ces résultat est contenu dans le suivant que démontre M. Enriques :

« Sur une courbe algébrique une serie rationnelle ∞^r de groupes de n points est linéaire ou contenu dans une série linéaire plus vaste g_n^s ($s > r$) ».

En appliquant ce résultat à une courbe hyperelliptique, l'auteur retrouve une propriété connue des intégrales hyperelliptiques réductibles aux elliptiques.

M. Enriques étend enfin aux surfaces les résultats précédents.

Sulle condizioni di racionalità dei piani doppi. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t. XIV, pp. 290-302, 1900, I.

M. Noether avait découvert trois types irréductibles de plans doubles rationnels, mais il n'avait pas pu démontrer en toute rigueur que ces trois types sont les seuls possibles. D'autres travaux permettaient d'établir cette réciproque, mais par une voie longue et indirecte. Dans leur note, MM.

Castelnuovo et Enriques reprennent le problème et le résolvent par une méthode directe qui leur permet d'étendre les résultats de M. Noether.

Soit $z^2 = f(x, y)$ un plan double pourvu d'une courbe de diramation C_{2n}, d'ordre pair $2n$, sans composante multiple ; toute transformation birationnelles change C_{2n} en une courbe qui, ajoutée aux courbes fondamentales, transformées des points multiples d'ordre impair de C_{2n}, constitue la courbe de diramation C_{2m} de la surface transformée. La présence éventuelle de ces courbes fondamentales amène les auteurs à assigner à tout point multiple d'ordre impair de C_{2n}, une multiplicité virtuelle qui simplifie le langage.

Supposons alors que C_{2n} soit privée d'adjointes d'indice quelconques, une discussion basée sur la multiplicité de C_{2n} et subdivisée en trois parties distinctes (suivant le reste de n par rapport a 3), montre que C_{2n} est une conique, ou un système de 2N droites issues d'un même point. De même, si toutes des adjointes font défaut, sauf la première, on trouve que C_{2n} coïncide avec une des trois courbes de M. Noether, et le plan double est alors rationnel ou réglé. Mais l'absence d'ajointes d'indice i pour la courbe de diramation, entraîne l'annulation du pluringenre P_i du plan double ; et l'on sait, inversement, que tout plan double rationnel ou réglé, a tous ses pluri-genres nuls, ce qui entraine la reciprocité cherchée.

Le *Mémoire* se termine par des applications aux surfaces possédant des faisceaux de courbes elliptiques ou hyperelliptiques.

Sur les hypothèses qui permettent l'introduction des coordonnées dans une variété à plusieurs dimensions, t. XII, pp. 222-39, 1898, I.

Le *Mémoire* de M. Enriques a pour but d'élucider une question d'*Analysis situs* que les géomètres avaient jusqu'alors negligée : la discussion rigoureuse des postulats qui permettent l'introduction des coordonnées dans une variété à n dimensions. M. Enriques se limite, d'ailleurs, au cas ou $n = 2$; mais, comme il le montre lui même, l'extension de ses résultats ne comporte aucune difficulté. Sa méthode repose, essentiellement, sur deux définitions et un postulat.

Nous appelerons variété r_1 à une dimension (ou ligne), une classe d'éléments à laquelle appartiennent deux ordres continus, sans éléments extrêmes et inverses l'un de l'autre. Définissons encore les variétés r_2 à deux dimensions ; nous appelerons ainsi une classe d'éléments qui contient deux systèmes de variétés r_1, a et b, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Tout élément de r_2 appartient à une variété a et à une variété b ;

2° Deux variétés a et b ont toujours en commun un élément (dans lequel elles se rencontrent) ;

3° Si a_1 et a_2 sont deux variétés du premier système, et si l'on considère plusieurs éléments consécutifs de a_1 et les variétés b qui les contiennent, ces dernières rencontrent a_2 suivant d'autant d'éléments consécutifs ; et vice-versa, pour les variétés b. On dit alors que les variétés a et b forment deux faisceaux.

Les deux définitions précédentes permettent déjà de démontrer divers théorèmes sur les variétés à deux dimensions, mais ils ne suffisent pas pour établir des répresentations planes. Pour obtenir ce résultat, il suffit de s'appuyer sur le postulat suivant :

« Sur la variété v_2, il éxiste un troisième faisceau c de variétés v_1 distint des deux premiers a et b ».

Considérons, alors, les lignes a et c qui passent par un point quelconque d'une ligne (variable) b; elles coupent une ligne (fixe) b_0 en deux points P et P_1, d'où une correspondance $[PP_1]$ variable avec b et qui joue un rôle capital dans la méthode de M. Enriques. L'étude de cette correspondance lui permet d'établir, notamment, le théorème suivant : *Soient sur* b_0 *quatre points situés dans l'ordre* PABM ; *on peut construire, quel que soit* n, $n-1$ *points appartenant au segment* PM *et tels qu'on ait*

$$[PM_1] = [M_1M_2] = \ldots = [M_{n-1}M].$$

De plus, il est toujours possible de trouver un entier m *tel que, pour* $n > m$, *l'un des points* M_i *soit à l'intérieur de* AB.

Ce tnéorème et ses corollaires conduisent, alors, à la représentation paramétrique cherchée.

Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere

Sur les équations différentielles linéaires du quatrième ordre qui deviennent intégrables en etant connue une intégrale particulière, t. XXIX, pp. 257-69, 1896.

L'auteur étudie, d'abord par la voie géométrique, les cinq cas où cela peut arriver en considerant les quatre intégrales d'un système fondamental comme coordonnées homogènes projectives d'un point de l'espace.

Soient y_1, y_2, y_3, y_4 ces quatre intégrales de l'équation :

$$A_0y + A_1y' + A_2y'' + A_3y''' + A_4y^{IV} = 0.$$

A toute intégrale

$$y = C_1y_1 + \ldots + C_4y_4$$

correspond un point. Les transformations du groupe Picard-Vessiot sont représentées par les homographies d'un groupe continu dans l'espace. L'équation est intégrable lorsque ces honographies laissent invariables au moins un point, une droite passant par ce point et un plan passant par cette droite. Lorsque une intégrale particulière est donnée, le groupe se réduit à un sous-groupe, qui ne change pas cette intégrale et, afin que l'équation soit intégrable, los homographies doivent, alors, être telles qu'en fixant un point, il s'en suive nécessairement qu'une droite (au moins) passant par ce point et un plan passant par cette droite restent fixes aussi. De cette manière l'auteur arrive à assigner cinq cas auxquels correspondent autant de

cas d'intégrabilité de l'équation. La réduction se fait toujours aux quadratures et à une ou deux équations de Riccati, à l'exception du dernier cas où l'on a, entre quatre intégrales convenablement choisies, et constituant un système fondamental, une relation :

$$(y_1y_4 - y_2y_3)^2 - 4\,(y_1y_3 - y_2^2)\,(y_2y_4 - y_3^2) = ae^{\int_0^x \varphi dx}$$

(a étant une constante et φ une fonction algébrique des coefficientes A_i), qui toutefois ne diffère pas essentiellement du cas où le second membre est 0, déjà étudié par Goursat.

Annali di Matematica pura ed applicata

Sur les groupes continus de transformations de Crémona de l'éspace. (En colaboration avec G. Fano), t. XXVI, sér. 2e, pp. 59-99, sep.-dec., 1897.

Le but de ce *Mémoire* est la classification des groupes continus de transformations birationnelles, ou transformations de Cremona, de l'éspace, autrement dit, la réduction de ces groupes à des types déterminés, à l'aide de transformations birationnelles.

Les auteurs établissent, d'abord, la proposition suivante, dont ils se servent fréquemment dans leur étude : tout groupe continu de transformations birationnelles de l'espace laisse invariants une infinité de systèmes linéaires de surfaces algébriques. Il en résulte que tout groupe crémonien de l'espace est semblable à un groupe projectif d'un certain espace S_n à n dimentions.

Dans la classification des groupes considérés, on est conduit aux conclusions suivantes :

Tout groupe primitif de transformations de Cremona est réductible *birationnellement* à un groupe primitif ou à un groupe conforme. Les groupes projectifs ont été déterminés par Lie. Dans le groupe ∞^{10} des transformations conformes, il y a un seul sous-groupe primitif qui ne puisse être transformé birationnellement en un groupe projectif : c'est le groupe des transformations conformes qui laissent une sphère invariante.

Parmi les groupes imprimitifs, certains sont réductibles birationnellement à des *groupes de Jonquières généralisés* (groupes possédant un faisceau invariant de droites, ou un faisceau invariant de plans). Ceux qui échappent à cette réduction son certains groupes crémoniens ∞^3 algébriques transitifs simples. Les auteurs sont donc amenés à étudier plus particulièrement ces derniers groupes : ils démontrent que les transformations d'un pareil groupe qui laissent invariants un point de l'espace doivent former un groupe fini, holoédriquement isomorphe à l'un des groupes de polyèdres réguliers; d'où, par les groupes cherchés, plusieurs types correspondent aux diverse polyèbres réguliers. Tout groupe de type diédrique se ramène à un groupe laissant invariant un faisceau de droites; tout groupe de type tétraédrique se ramène à un groupe conforme. Il reste donc seulement deux cas essentiellement nouveaux, correspondant à l'octaèdre et à l'icosaédre : on peut réduire

birationnellement les groupes du type octaedrique à un groupe composé de ∞^3 transformations cubiques, et ceux du type icosaedrique à un groupe formé ∞^3 transformations du septième ordre.

Sur quelques questions fondamentales dans la Théorie des surfaces algébriques. (En collaboration avec G. Castelnuovo), t. VI, sér. 3e, pp. 165-225, 1901.

Cet important *Mémoire* contient, avec des résultats nouveaux, un exposé des recherches antérieures des deux auteurs sur la Théorie des surfaces algébriques. Le lecteur en trouvera una analyse detaillée dans la note publiée par les auteurs, à la fin du tome II de la *Théorie des fonctions algébriques à deux variables indépendantes* de MM. Picard et Simart.

Les développements nouveaux introduits dans ce mémoire sont basés sur la notion des systèmes adjoints successifs d'un système linéaire de courbes tracées sur une surface. Soit $|C|$ un système linéaire, $|C'|$ son adjoint, $|C''|$ l'adjoint de $|C'|$ et ainsi de suite. MM. Castelnuovo et Enriques ont cherché dans quel cas la série

$$|C|, \quad |C'|, \quad |C''|, \quad \ldots, \quad |C^{(i)}|,$$

s'arrête à un dernier terme. Ils démontrent à ce sujet le théorème fondamental suivant :

Toute surface sur laquelle le procédé d'adjonction s'épuise par une nombre fini d'opérations veut être transformé birationnellement en une surface réglée, rationnelle ou non.

On en déduit, entre autres conséquences, le résultat suivant :

Toute surface qui contient un système linéaire de courbes de dimensions $\geqq 0$, *de genre* $\pi > 0$ *et de degré* $n > 2\pi > 2\pi - 2$, *peut être transformée en surface réglée.*

Pour $\pi = 1$, $\pi = 2$, on retrouve des résultats connus. Pour $\pi = 3$, on obtient un résultat nouveau :

« *Une surface d'ordre 4, dont les sections planes ont la genre 3, est rationnelle ou réglée, ou enfin transformable en une surface réglée de genre 1 ou 2* » (1).

Parmi les autres conséquences du théorème fondamental, signalons la détermination des conditions pour qu'une surface puisse être transformée en une surface réglée. On en déduit, en particulier, les conditions connues de rationalité d'une surface.

Enfin, le Mémoire contient divers développements relatifs à l'invariant appelé *genre linéaire*.

(1) Cet énoncé n'est cependant pas vrai ainsi. Il doit y avoir quelques conditions.

Atti della R. Accademia dei Lincei, 1893, II

Sur les groupes continus de transformations crémoniennes dans le plan.

Ces groupes peuvent se transformer birationnellement en l'un de ces types :

1° Groupes ∞^8 des homographies (et ses sous-groupes) ;

2° Groupes ∞^6 des transformations quadratiques qui changent en lui-même le système linéaire de coniques à deux point-bases distincts, et par cela les deux faisceaux de rayons ayant ces deux points pour centres (et les sous-groupes) ;

3° Groupes ∞^{n+5} des transformations de Jonquières (d'ordre n), qui changent en lui même le système linéaire ∞^{n+1} des courbes d'ordre n ayant un point $(n-1)^{-ple}$ et les $n-1$ tangentes fixes (et ses sous-groupes).

Donc, la Géométrie plane, ayant comme groupe principal un groupe continu de transformations crémoniennes, coïncide avec la Géométrie projective sur le plan, ou sur une quadrique réglée, ou sur un cône rationnel normal de l'éspace de $n+1$ dimensions, ou bien avec un cas particulier de l'une de ces trois géométries.

Sur un groupe continu de transformations de Jonquières dans le plan.

Des trois groupes typiques considérés dans la note précédente, les deux premiers ont été étudiés. L'auteur donne la composition du troisième, qui correspond au groupe K des transformations projectives qui changent en lui-même le cône rationnel normal de l'espace S_{n+1} (en supposant que ce cône soit représenté sur le plan). Il contient trois groupes exceptionnels :

1° Celui des ∞^{n+4} des homographies spéciales (avec un point uni infiniment rapproché du sommet 0) ;

2° Celui des ∞^{n+2} des homologies de centre 0 ;

3° Celui des ∞^{n-1} des homologies spéciales de centre 0 et hyperplans passant par 0 permutables deux à deux.

L'auteur transporte ces résultats sur le plan, relativement au groupe de transformations de Jonquières qui changent en lui-même le système représentatif du cône, et ensuite donne l'interprétation de la géométrie du plan ayant ce groupe comme groupe principal.

Sur les systèmes linéaires des surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes hyperelliptiques.

Une surface à sections planes hyperelliptiques de genre $p > 1$ est :

1° Une surface hyperelliptiques de genre p ;

2° Ou bien une surface rationnelle renfermant un faisceau de coniques.

Une variété de trois dimentions dont les sections avec les S_{r-2} de S_r sont hyperelliptiques de genre $p > 1$ est :

1° Un système simplement infini de plans, de genre p ;

2° Ou bien une variété rationnelle renfermant un faisceau de quadriques.

Encore sur les systèmes linéaires de surfaces algébriques dont les intersections variables sont des courbes elliptiques.

Ces systèmes, qu'on suppose d'ordre $n > 3$, c'est-à-dire que trois surfaces variables, se rencontrent en $n > 3$ points, peuvent se classifier en les réduisant par des transformations birationnelles aux trois types suivants :

1° Pour $n = 4, 5, 6, 7, 8$, un système de surfaces cubiques ;

2° Pour $n = 7, 8$ aussi le système ∞^8 ou ∞^9 des quadriques ayant un point de base, ou dépourvu de point de base ;

3° Pour $n = 8$, aussi le système ∞^1 de surfaces de quatrième ordre à point triple de base, deux droites doubles passant par ce point, et le même cône quadrique tangent en ce point.

Ces conclusions sont tirées d'une étude que l'auteur fait en général sur les variétés d'un espace S_n, ou il démontre, d'abord, que les variétés à sections hyperplanaires elliptiques ou contiennent un faisceau elliptique de plans, ou bien sont rationnelles, et ensuite, il étudie les variétés normales de S_{n-1}, dont la représentation sur S_2 donne les types cherchés.

Sur les irrationalités dont peut dépendre la résolution d'une équations algébrique $f(x, y, z) = 0$ au moyen de fonctions rationnelles de deux paramètres.

Généralisation de la question résolue par Noether (*Math. Ann.*, t. III) relativement à une équation $f(x, y) = 0$.

Étant

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface rationnelle, et par cela

$$x = \varphi_1(u, v), \qquad y = \varphi_2(u, v), \qquad z = \varphi_3(u, v), \tag{2}$$

les φ étant des fonctions rationnelles, on veut déterminer quelles sont les irrationnalités les plus simples, dans les coefficientes des φ, qu'il faut ajouter pour obtenir la résolution (2). On suppose que la résolution soit inversible, c'est-à-dire, qu'on puisse aussi exprimer rationnellement u et v par x et y et z. Le résultat est le suivant :

La résolution (2) peut toujours s'effectuer par des opérations rationnelles (d'élimination), des extractions de racine carrée et cubiques, et par la résolution d'une des équations pour la bissection de l'argument des fonctions :

1° Abéliennes de genre 3 ;

2° Ou abéliennes de genre 4 ;

3° Ou hyperelliptiques de genre p ($p = 1, 2, \ldots$).

Les démonstrations ne sont qu'indiquées sommairement et renvoyées à un autre travail. Elles se fondent sur une transformation succesive de la surface rationnelle

$$f(x, y, z) = 0$$

d'ordre n et à sections hyperelliptiques de genre > 2 au moyen de polynomes adjoints d'ordre $n - 3$.

Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont hyperelliptiques.

Ces surfaces sont :

1° Celles qui ont un faisceau rationnel de courbes de genre 2 ;

2° Celles qui sont représentables sur le plan double avec une courbe de diramation du huitième ordre (le genre p de la surface est $= 3$) ;

3° Celles qui sont représentables sur le plan double avec une courbe de diramation du dixième ordre ($p = 6$).

Les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 2$, t. VI, pp. 139-44, 1897, I.

Elles peuvent se rapporter birationnellement à l'un des types suivants :

1° $\qquad p^{(1)} = 2, \qquad p = 1.$

Surface F_6 du sixième ordre à trois droites cuspidales situées dans un plan et passant par le point où F_6 a, avec soi-même, un contact de 5e ordre ;

2° $\qquad p^{(1)} = 2, \qquad p = 2.$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec une courbe de diramation $f(x, y) = 0$ du dixième ordre, douée de deux points quintuples infiniment rapprochés.

Sur les surfaces algébriques de genre linéaire $p^{(1)} = 3$, t. VI, pp. 170-4, 1897, I.

Trois types :

1° $\qquad p^{(1)} = 3, \qquad p = 3.$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation $f(x, y) = 0$ du huitième ordre ;

2° $\qquad p^{(1)} = 3, \qquad p = 2.$

Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation composée d'une droite r et une courbe du neuvième ordre douée de trois points triples sur r et de deux autres points triples infiniments rapprochés ;

3° $\qquad p^{(1)} = 3, \qquad p = 1.$

a) Surface du huitième ordre, douée de courbe double du quatorzième ordre (eventuellement dégénérée) définie, dans le cas général, comme la courbe double d'une surface du septième ordre, rationnelle à sections elliptiques.

b) Plan double $z^2 = f(x, y)$ avec courbe de diramation du dixième ordre, douée d'un point quadruple et de quatre couples de points triples infiniments rapprochés.

Sur les plans doubles de genre linéaire $p^{(1)} = 1$, t. VII, pp. 234-40, 1898, I.

La courbe de diramation $f(x, y) = 0$ est supposée ne pas contenir de parties multiples. Étant P le bigenre, l'auteur fait la classification des plans doubles pour lesquels

$$p^{(1)} = 1 \qquad \text{et} \qquad P > 1.$$

On en a deux classes :

I. Plans doubles à courbe de diramation d'ordre $2n$ ($n > 3$), ayant un point $(2n-4)$-uple ou $(2n-3)$-uple.

II. Plans doubles dont la courbe de diramation se compose de r courbes d'ordre $3s$ ayant neuf points s-uples en commun (faisceau d'Halphen), et éventuellement (pour r et s impairs et $s > 1$), de la cubique passant par les neuf points.

Chaque classe comprend plusieurs cas subordonnés.

Sur les surfaces possédant un faisceau elliptique ou de genre deux de courbes rationnelles, t. VII, pp. 281-6, 1898, II.

Toute surface possédant un faisceau elliptique ou de genre deux de courbes rationnelles, peut se transformer birationnellement en une surface réglée (elliptique ou de genre deux, respectivement). Le cas $p = 0$ avait été considéré par Noether. Le cas général, de p quelconque, est traité dans la note à la page 344, qui est la suivante :

Sur les surfaces possédant un faisceau de courbes rationnelles, t. VII, pp. 344-47, 1898, II.

Le théorème démontré dans la note que nous venons de mentionner, pour le cas $p = 1$, $p = 2$, est ici démontré en général pour p quelconque. Une surface algébrique, possédant un faisceau de courbes rationnelles, peut se transformer birationnellement en une surface réglée, dont le genre p est égal à celui du faisceau.

APPENDICE

Le temps écoulé depuis la date de cette conférence et sa publication, a permis une revisation des listes des travaux de Mr Enriques et de les completer jusqu'à fin avril 1931. Nous donnons a titre d'appendice les compléments en question.

Boll. di Bibliografia e Storia delle Scienze Mat. (1899) : *Programma d'un corso di geometria superiore per l'anno 1897-8.*

Mem. Soc. It. delle Scienze detta dei XL (1906) : *Sopra le superficie algebriche di bigenere 1.*

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2e sér., III, 1900) : *Sur le Surfaces algébriques admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce.*

Rassegna contemporanea : *Matematiche e Filosofie* (an I, n° 10, 1908). *Il valore della Scienza* (an II, n° 1, 1909), traduit dans la *Revue du Mois* (1909). *Esiste un sistema filosofico de Benedetto Croce?* (n° 6, 1911).

Annuario dell'Università di Bologna : *Il valore della Scienza* (1907-8). Discours inaugural de l'année académique 1907-8.

Questioni Filosofiche (éd. Formiggini) : *Rinascimento filosofico nella Scienza contemporanea* (1908). Discours inaugural du Congrès Philosophique de Parme. *Un caso di indeterminazione nella meccanica* (an III, t. IV, 1909), note critique. *Il principio di ragion sufficiente nella costruzione scientifica*, avec traduction française (an III, t. V, 1909). *La teoria dello Stato e il sistema rappresentativo* (t. VI, 1909). *Les deux Écoles italiennes de droit Pénal* (t. VI, 1909).

Riv. di Filosofia : *La metafisica de Hegel* (an II, fasc. I, 1910). *La filosofia italiana al Congresso di Bologna* (1911). *Mettiamo le cose a posto* (an III, fasc. IV, 1911). *Risposta a Benedetto Croce* (an IV, fasc. II, 1912). *Il salto dalla teoria della conoscenza all'idealismo metafisico* (an V, fasc. I, 1913). *Il concetto della logica dimostrativa secondo Aristotele* (janvier 1918).

Encyclopadie der Phil. Wiss : *Die problem der Logik* (1912).

R. Acc. delle Scienze dell'Istituto di Bologna : *Sulla teoria della materia e sulle origini della meccanica in Democrito d'Abdera* (1918).

Rev. Mat. Hispano-Americana : *La evolución del concepto de la geometría y la escuela italiana durante los últimos cincuenta años* (1920).

Math. Ann. : *Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche* (t. LXXXV, 1922).

Rev. de Métaph. et de Morale : *La Signification et l'importance de l'histoire de la science et l'œuvre de Paul Tannery* (1923). Voir aussi l'introduction au volume de P. Tannery : *Pour l'Histoire de la Science Hellène* (2e éd., Paris, 1930).

Bull Soc. Math. de France : *Sur la classification des surfaces algébriqurs au point de vue des transformations birationnelles* (t. LII, p. 602, 1924).

L'enseignement Math. : *Sur la théorie des équations et des fonctions algébriques d'après l'école géométrique italienne* (p. 309, 1923).

Periodico di Matem. : *Il problema della forma della Terra nell'antica Grecia* (1926). Cet article a été reproduit dans le livre de A. Clairaut : *La teoria della forma della terra*, par les soins de M. Lambertini, Bologne, Zanichelli, 1928. *La teoria matematica della lotta per l'esistenza secondo Vito Volterra* (4e sér., t. VII, n° 2, 1927). *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola media* (t. VIII, n° 1, 1928).

Nuova Antologia : *L'Italia nella collaborazione universale della cultura* (1926).

Rel. Congr. Internat. de Philoph. de Cambridge, Mass. : *Continuity and discontinuity of Sciences* (1926).

Dans le volume : In memoriam N. Lobatchewsky : *La Géométrie non-euclidienne et la Théorie de la connaissance* (Kazan, 1927).

Leonardo : *Gli studi matematici (Arti e studi in Italia nell'ultimo venticinquennio*, an VI, n° 5, 1928).

Enciclopedia Italiana : Les articles suivants : *Abeliano. Analisi. Angolo* (1929). *Assioma. Assoluto. Assurdo. Betti Enrico* (1930). *Curve. Continuità* (en collaboration avec O. Chisini) (1931).

Scientia : *I motivi della filosofia di Eugenio Rignano* (sér. III, I-IV, 1930). *Il principio di ragion sufficiente nel pensiero greco* (sér. III, I-XI, 1930).

Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Hamburgischen Universität (1929) : *Ansichten ueber die Entwicklung der griechischen Wissenschaft.*

Nachrichten der Hochschulges. von Giessen (7, 2, 1929) : *Ueber die Geschichte des wissenschaftlichen Denkens bei den Griechen.*

Rend. R. Acc. Lincei (juillet 1930) : *Sopra le superficie algebriche trasformabili in rigata.*

Schola et Vita (an V, n° 13, 1930) : *Philosophia de Elea et positione de problema de Mechanica.*

Relativement aux livres, nous citerons : *Zasady Geometry Elementarnej do uzytku skol srednich* (Varsovie, 1916). *Principi di Filosofia naturale di I. Newton, con note critiche sullo sviluppo dei concetti della Meccanica,* en collaboration avec U. Forti (Stock, Rome, 1925). *Storia del pensiero scientifico,* en collaboration avec G. Santillana. Vol. I : *La Scienza antica* (en cours de publication, éd. Treves, Milan, 1931). Ajoutons : la 2e éd. (1930) des *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni,* et les traductions : En français par M. Legaut de ses *Leçons de Géométrie Projective* (Paris, Gauthier-Villars, 1930) ; par G. E. Monod-Herzen, de son *Evolution de la logique* (E. Chiron, Paris, 1925) ; par L. Rougier, de ses *Concepts fondamentaux de la Science* (Flammarion, Paris) ; par Dubois, de *Problèmes de la Science et la logique* (Alcan, 1909). En russe, de ce dernier (Moscou, 1911). En espagnol, par R. Mat. Hispano-America (Valladolid, 1921) des ses *Cuestiones relativas a la Matemática elemental ;* par F. Jaime (Buenos Aires, 1929) de sa *Geometria Intuitiva ;* par F. La Menza (Buenos Aires, 1929), de sa *Geometría* ; par O. Fernández, de ses *Conferencias sobre la Geometría no-euclídea* (Madrid, 1918). En anglais, par K. Royce, avec une préface de Josiah Royce, de *Problems of Science* (Oppencourt, 1914) ; et par J. Rosenthal, de *The Historic Development of Logik* (H. Holt, New York, 1929).

Au moment de fermer cet article, nous recevons le numéro de mai 1931, de *Periodico di Matematiche* contenant (pp. 172 à 186) une liste des publications de Mr Enriques par ordre chronologique redactée par les soins de Mlle Sarah Soldati.

Cette liste, jointe a la nôtre, permet de se guider, pour trouver telle ou telle publication de l'éminent professeur, soit par la connaissance de la revue où elle se trouve, soit par la date de son apparition.

C. C. Dassen.

ÍNDICE GENERAL

DE LAS

MATERIAS CONTENIDAS EN EL TOMO CENTÉSIMO UNDÉCIMO

C. Villalobos Domínguez, Investigación sobre los espectros impuros y sus consecuencias para la teoría de los colores 5

J. C. Vignaux, Algunos teoremas sobre producto de series sumables con el método exponencial 41

J. Sescosse, La filosofía en la escuela 56

Ciclo de conferencias (1929) : Algunas tendencias modernas en la siderurgia y la implantación de esta industria en la República Argentina, por Swen Wässman. 65

L. Kraglievich, Sobre la presencia de toxodontes haplodontéridos en el piso araucanense de Catamarca : *Toxodontherium andinum* n. sp. 93

Carlos M. Albizzati y Roberto Faura, Datos químicos sobre *Chenopodium quinoa* Willd. 137

Carlos Rusconi, Noticias acerca de un esqueleto juvenil perteneciente a los grandes carnívoros extinguidos : *Smilodon bonaërensis* 147

Alfredo Jatho, La correlación de la presión atmosférica y de las precipitaciones con las manchas solares 209. 295

Ciclo de conferencias (1929) : Fundación del Observatorio Nacional Argentino y sus objetos. Las obras llevadas a cabo en el tiempo de Gould; en la segunda época, durante la administración de Thome; y hasta el presente, por C. D. Perrine 281

Memoria anual del presidente de la Sociedad Científica Argentina doctor Nicolás Lozano 312

P. Magne de la Croix, Répétition des impressions cinesthésiques dans l'évolution des allures 353

José F. Molfino, Notas botánicas (séptima serie) 367

Comunicaciones y notas científicas : Sobre productos de series y de integrales dobles convergentes, por el doctor J. C. Vignaux 305

Algunos teoremas sobre producto de series sumables, por el doctor J. C. Vignaux 308

Notas varias : Luis Luiggi (Génova 1856-Roma 1931) 97

Profesor Lucas Kraglievich 97

2º Congreso Internacional de Hospitales 309

2º Congreso Internacional de Medicina Tropical 310

Fundación Montefiore. Concurso de 1932 310

Miguel Lillo (1862-1931) 310

Bibliografía : C. C. D. 63, 99, 157, 234, 311
C. W. 60
L. V. Floriani 385

Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Buenos Aires

Pierre T. Vignau, Les sables ferrugineux de Necochea. Composition chimique et application à la sidérurgie 105
C. C. Dassen, Les angles et les rotations « imaginaires ». Troisième chapitre de géométrie analytique vectorielle 161, 241
C. C. D., Luis Luiggi (1856-1931) 204
Informaciones generales y bibliografía : Premio Municipal « Eduardo L. Holmberg ». 238
Investigaciones, enseñanza y memorias : Memoria del presidente de la Academia relativa al período 20 de abril de 1929 a 18 de abril de 1931 323
Recepciones y distinciones : Recepción pública de los doctores Pablo Langevin y Federico Enriques el 25 de agosto de 1928, por C. C. Dassen 329, 387